

Esercizi di Analisi II

Anno Accademico 2008-2009

Funzioni: limiti, continuità e differenziabilità

1. Si determini il dominio di ciascuna delle seguenti funzioni, precisandone la natura:

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y - 1}{x^2 - 1}} + \log(x^2 + y^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-xy} + \arcsin(x^2 + y^2) \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^4} \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \log(xy^2 + x^2y) \quad (5)$$

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

$$f(x, y) = 2x - 5y \quad (6)$$

$$f(x, y) = x^2y \quad (7)$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{y+1}} \quad (8)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (9)$$

3. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad (10)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \cdot \log(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2} \quad (12)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4} \quad (13)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot \sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (14)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y} \quad (15)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^6} \quad (16)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2} \quad (17)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^2 \cdot \log x}{(x-1)^2 + y^2} \quad (18)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} \quad (19)$$

4. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{|xy - y|},$$

si dica se:

- (i) f è continua nel punto $(1, 0)$;
- (ii) esistono le derivate parziali in $(1, 0)$;
- (iii) f è differenziabile in $(1, 0)$.

5. Calcolare, se esiste, il gradiente delle seguenti funzioni nel punto indicato:

$$f(x, y) = xy \cdot e^{\sqrt{|x+y|}} \quad \text{in } (0, 0) \quad (20)$$

$$f(x, y) = |x + y| \cdot \sin(x^2 + y) \quad \text{in } (0, 0) \quad (21)$$

$$f(x, y) = \sqrt{|x^2 - xy|} \quad \text{in } (0, 0) \quad (22)$$

$$f(x, y) = (x - y) \cdot \sqrt{|y - x^2|} \quad \text{in } (1, 1) \quad (23)$$

6. Per ogni vettore $\mathbf{v} \neq 0$ si calcoli, se esiste, la derivata direzionale della funzione

$$f(x, y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2 \cdot y}$$

rispetto a \mathbf{v} nel punto $(1, 0)$.

Si dica poi se f è differenziabile in $(1, 0)$.

7. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto P assegnato:

$$f(x, y) = x^3 - y^3; \quad P = (0, 1, -1) \quad (24)$$

$$f(x, y) = x^y + y^x; \quad P = (1, 1, 2) \quad (25)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad P = (2, 0, 2) \quad (26)$$

8. Si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2y + y^2z + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

- (i) Determinare il dominio e l'insieme di continuità di f ;
- (ii) determinare l'insieme di differenziabilità di f ;
- (iii) trovare le direzioni rispetto alle quali esiste la derivata direzionale di f nel punto $(0, 0, 0)$ e calcolarla;
- (iv) calcolare, se esiste,

$$\lim_{|(x, y, z)| \rightarrow +\infty} f(x, y, z).$$

9. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \log(x^2 - y^2 + 1).$$

- (i) Determinare il dominio e le curve di livello di f ;
- (ii) calcolare le derivate parziali prime e seconde;
- (iii) calcolare la derivata direzionale di f in qualsiasi punto rispetto al vettore $\mathbf{v} = (3, -4)$;
- (iv) determinare un vettore normale al grafico di f nel punto $Q = (\sqrt{3}, 1, \log 3)$;
- (v) trovare i versori normali al grafico di f in Q ;
- (vi) scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in Q ;
- (vii) scrivere l'equazione della curva di livello passante per il punto $P = (\sqrt{3}, 1)$;
- (viii) determinare un vettore in P normale a tale curva di livello;
- (ix) scrivere l'equazione della retta tangente in P alla medesima curva di livello;
- (x) calcolare le derivate direzionali di f in P lungo tutte le direzioni;
- (xi) se $\mathbf{v} = (\cos \gamma, \sin \gamma)$ è un versore, dire per quali valori di γ la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(P)$ è nulla, massima e minima;
- (xii) scrivere il polinomio di McLaurin di grado 2 di f .

Cenni di soluzioni

1. In progress