Esercizi di Analisi II

Anno Accademico 2008-2009

Integrali doppi e tripli

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

$$\int_D \frac{1}{(x+y)^2} dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : 3 \le x \le 4\,;\ 1 \le y \le 2\big\} \tag{1}$$

$$\int_D xydxdy \qquad D = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 1\,;\ x^2 \le y \le 1+x\big\} \tag{2}$$

$$\int_D \frac{\sin y}{y} dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : 0 \le x \le y\,;\ 0 \le y \le \pi\big\} \tag{3}$$

$$\int_D (x+2y)dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : 0 \le x \le 2\,;\ \min(x,x^2) \le y \le \max(x,x^2)\big\} \tag{4}$$

$$\int_D \left|\sin x - y\right| dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : 0 \le x \le \pi\,;\ 0 \le y \le 1\big\} \tag{5}$$

2. Calcolare i seguenti integrali doppi:

$$\int_D y^2 dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\,;\ y \ge 0\big\} \tag{6}$$

$$\int_D (x^2+y^2)dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\,;\ 0 \le y \le x\big\} \tag{7}$$

$$\int_D x^2 dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\,;\ y \ge 0\big\} \tag{8}$$

$$\int_D ydxdy \qquad D = \big\{(x,y) : 4x^2+9y^2 \le 36\,;\ y \ge 0\big\} \tag{9}$$

3. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$\int_D (x^2+y^2)^{-\alpha} dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \ge 1\big\} \tag{10}$$

$$\int_D \frac{xy}{x^4+y^4} dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \ge 4\,;\ x \ge 0\,;\ y \ge 0\big\} \tag{11}$$

$$\int_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy \qquad D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\,;\ 0 \le y \le x\big\} \tag{12}$$

4. Calcolare i seguenti integrali tripli:

$$\int_D (x+y+z)dxdydz \quad D = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1\,;\; 2x \le y \le x+1\,;\; 0 \le z \le x+y\} \tag{13}$$

$$\int_D x(y^2+z^2)dxdydz \quad D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\,;\; x^2 \ge y^2+z^2\,;\; x \ge 0\} \tag{14}$$

$$\int_D xdxdydz \quad D = \{(x,y,z) : x,y,z \ge 0\,;\; x+y+z \le 1\} \tag{15}$$

5. Si consideri, nel piano (x,z), la circonferenza di centro $(2,3)$ e raggio 1, e si denoti con S la superficie ottenuta ruotando tale circonferenza di un giro completo attorno all'asse z.

   (i) Determinare una parametrizzazione di S;

   (ii) calcolare la massa di S, supponendo che la sua densità superficiale sia proporzionale alla distanza dal piano $z = 0$.

6. Sia V il solido generato da una rotazione completa attorno all'asse y dell'insieme

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0\,;\; 1 \le y \le 3\,;\; y \le 6 - x^2\}\,.$$

   (i) Calcolare il volume di V;

   (ii) determinare il baricentro del solido V (considerato omogeneo);

   (iii) determinare un vettore normale alla superficie laterale di V nel punto $(0,2,2)$;

   (iv) calcolare l'area della sezione di V con il piano $z = 3x$.

Forme differenziali. Campi vettoriali

1. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \left[(2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy\right]\,,$$

   dove γ è l'arco di parabola $2x = \pi y^2$ che congiunge i punti $(0,0)$ e $(\pi/2, 1)$.

2. Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\gamma (xdy - ydx)\,,$$

   dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\alpha t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3\alpha t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad t \in [0, +\infty)\,.$$

3. Dire se la forma differenziale

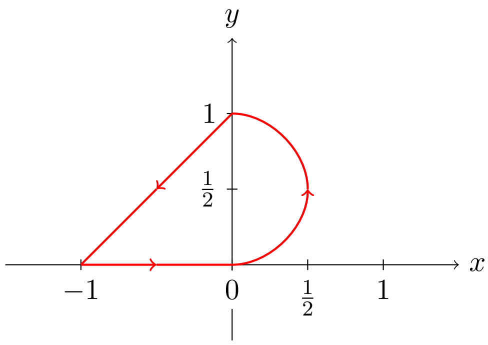
$$\omega(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy$$

è esatta, e in caso affermativo determinarne una primitiva.

4. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\boldsymbol{F} = (xy)\boldsymbol{i} + (x^2y)\boldsymbol{j}$$

lungo la curva disegnata in figura:



5. Si considerino il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F} = (2xy^3)\boldsymbol{i} + (3x^2y^2)\boldsymbol{j}$$

e la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = e^t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1]\,.$$

(i) Dire se $\boldsymbol{F}$ è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale;

(ii) calcolare il lavoro di $\boldsymbol{F}$ lungo la curva γ.

6. Si considerino il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F} = \big[\sin(yz) - y\big]\boldsymbol{i} + \big[2yz + \alpha x + xz\cdot\cos(yz)\big]\boldsymbol{j} + \big[y^2 + xy\cdot\cos(yz)\big]\boldsymbol{k}$$

e la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = \sin t \cos t \\ y = \sin t \\ z = \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

(i) Trovare il valore di α per il quale il campo $\boldsymbol{F}$ è conservativo;

(ii) fissato α al valore trovato nel punto (i), determinare un potenziale del campo $\boldsymbol{F}$;

(iii) calcolare il lavoro di $\boldsymbol{F}$ lungo la curva γ.

7. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

attraverso la superficie laterale del cono di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \qquad (0 \leq x \leq b)\,.$$

8. Si consideri la curva piana γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 10(t - t^2) \\ y = \sin(2\pi t) \end{cases} \qquad t \in [0, 1]\,.$$

   (i) Stabilire se γ è chiusa, semplice, regolare, e disegnarne il grafico;

   (ii) calcolare l'area della parte di piano delimitata dal grafico di γ.