1. Calcolare, giustificandone l'esistenza, il seguente integrale:

$$\int\int_D \frac{y}{(1+x)^2} dxdy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le y \le 1, y^2 \le x \le y\}$.

2. Disegnare il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y - x^2 \ge 0, y + |x| \le 2\}$$

e calcolare

$$\int\int_D y dxdy.$$

3. Calcolare

$$\int\int_D xy^2 dxdy,$$

dove D è il triangolo di vertici $(-3, 0)$, $(3, 0)$ e $(0, 3)$.

4. Calcolare

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy \right) dx.$$

5. Calcolare

$$\int\int_D \frac{y}{x^2 + y^2} dxdy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 2, -1 \le y \le 2, x^2 + y^2 \ge 1\}$.

6. Trovare il baricentro della lamina materiale che occupa il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e avente densità di massa $\rho(x, y) = 1 + y$.

7. Utilizzare le coordinate polari per calcolare

$$\int\int_D x^2 dxdy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4 \le x^2 + y^2 \le 9\}$.

8. Calcolare

$$\int\int_D (x^2 + y^2) \cdot e^{(x^2+y^2)^2} dxdy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4, y \le -|x|\}$.

9. Operando un opportuno cambiamento di variabili, calcolare

$$\int\int_D \frac{1}{xy} dxdy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x + y < 3, x < y < 2x\}$.

10. Calcolare il volume dell'ellissoide di semiassi a, b e c.

11. Calcolare
$$\int\int\int_T (x+z)dxdydz,$$
dove
$$T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z < 1\},$$
utilizzando sia il metodo di integrazione per fili che per strati.

12. Calcolare
$$\int\int\int_D (x^2+y^2)dxdydz,$$
dove
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

13. Calcolare
$$\int\int\int_D |xy|dxdydz,$$
dove D è il solido ottenuto ruotando attorno all'asse z il dominio piano
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0, 0 \leq z \leq 1, 1 \leq y \leq 1+z\}.$$

Cenni di soluzione:

1. D è x-semplice e f è continua su D, quindi f è integrabile su D e si ha
$$\int\int_D \frac{y}{(1+x)^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y \frac{y}{(1+x)^2}dx\right) dy = \int_0^1 y\left[-(1+x)^{-1}\right]_{y^2}^y dy$$
$$= -\int_0^1 \frac{y}{1+y}dy + \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}dy = \ldots = \frac{3}{2}\log 2 - 1.$$
Osserva che D è anche y-semplice:
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\};$$
avremmo quindi potuto calcolare l'integrale anche nel seguente modo:
$$\int\int_D \frac{y}{(1+x)^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \frac{y}{(1+x)^2}dy\right) dx = \ldots = \frac{3}{2}\log 2 - 1.$$

2. D è la regione compresa tra le funzioni $y = x^2$ e $y = 2-|x|$:
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2-|x|\},$$
quindi è y-semplice. Dato che f è continua su D, l'integrale esiste.

Poiché l'insieme D è simmetrico rispetto all'asse y e $f(x,y) = y$ è pari rispetto a x, possiamo scrivere

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = 2\int\int_{D_1} f(x,y)dxdy,$$

dove

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2-x\}.$$

Quindi

$$\int\int_D ydxdy = 2\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} ydy\right) dx = \ldots = \frac{32}{15}.$$

3. Poiché l'insieme D è simmetrico rispetto all'asse y e la funzione $f(x,y) = xy^2$ è dispari rispetto alla variabile x, l'integrale è nullo.

4. Le primitive della funzione $g(y) = e^{y^3}$ non sono funzioni elementari. Proviamo a cambiare l'ordine di integrazione, rappresentando l'insieme di integrazione in forma x-semplice:

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\};$$

$$\int\int_D e^{y^3}dxdy = \int_0^1 e^{y^3}\left(\int_0^{y^2} dx\right) dy = \ldots = \frac{1}{3}(e-1).$$

5. $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ è pari rispetto alla variabile x e D è simmetrico rispetto all'asse y, quindi

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = 2\int\int_{D_1} f(x,y)dxdy,$$

dove

$$D_1 = D_2 \cup D_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq y \leq 1, \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 2\}$$
$$\cup\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2\}.$$

Poiché D_2 è simmetrico rispetto all'asse x e $f(x,y)$ è dispari rispetto alla variabile y, possiamo concludere:

$$\int\int_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy = 2\int\int_{D_3} \frac{y}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^2 \left(\int_1^2 \frac{y}{x^2+y^2}dy\right) dx$$

$$= \ldots = 2\log\frac{8}{5} + \pi - 2\arctan 2.$$

6. La massa totale della lamina è

$$M = \int\int_D \rho(x,y)dxdy = \ldots = \frac{4}{3},$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -1+y \leq x \leq 1-y\} :$$

le coordinate del baricentro sono

$$x_B = \frac{1}{M} \int\int_D x\rho(x,y)dxdy = 0$$

e

$$x_B = \frac{1}{M} \int\int_D y\rho(x,y)dxdy = \ldots = \frac{3}{8}.$$

7. Data la simmetria radiale dell'insieme di integrazione (D è una corona circolare), conviene passare alle coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases},$$

per cui l'elemento infinitesimo d'area diventa

$$dxdy = \rho \cdot d\rho d\vartheta$$

e l'insieme di integrazione diventa un rettangolo:

$$E = \{(\rho,\vartheta) \in \mathbf{R}^2 : 2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}.$$

$$\int\int_D x^2 dxdy = \int\int_E \rho^2\cos^2\vartheta \cdot \rho \cdot d\rho d\vartheta = \left(\int_2^3 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta d\vartheta\right)$$
$$= \ldots = \frac{65}{4}\pi.$$

8. La funzione integranda è a simmetria radiale e D è un settore circolare, quindi conviene passare alle coordinate polari:

$$E = \{(\rho,\vartheta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2, \frac{5}{4}\pi \leq \vartheta \leq \frac{7}{4}\pi\}$$

e

$$\int\int_D (x^2+y^2) \cdot e^{(x^2+y^2)^2} dxdy = \int\int_E \rho^3 e^{\rho^4} d\rho d\vartheta = \ldots = \frac{\pi}{8}(e^{16}-1).$$

9. L'insieme D non contiene alcun punto di ascissa nulla, quindi possiamo riscrivere

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x+y < 3, 1 < \frac{y}{x} < 2\}.$$

Effettuando il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = x+y \\ y = \frac{y}{x} \end{cases},$$

trasformiamo l'insieme di integrazione in un rettangolo:

$$E = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : 1 < u < 3, 1 < v < 2\}.$$

Scrivendo le variabili x e y in funzione di u e v

$$\begin{cases} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{cases}$$

e calcolando il determinante Jacobiano della trasformazione, otteniamo che l'elemento infinitesimo d'area è

$$dxdx = \frac{u}{(1+v)^2} dudv.$$

$$\int\int_D \frac{1}{xy} dxdy = \int\int_E \frac{(1+v)^2}{u^2 v} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} dudv = \int\int_E \frac{1}{uv} dudv$$
$$= \ldots = \log 3 \cdot \log 2.$$

10. L'equazione dell'ellissoide è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

da cui

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Allora il volume dell'ellissoide è

$$Vol = 2 \int\int_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Conviene in questo caso utilizzare il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x = a \cdot \rho \cos \vartheta \\ y = b \cdot \rho \sin \vartheta \end{cases},$$

che porta la trasformazione di D nel rettangolo

$$E = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}.$$

Poiché il determinante Jacobiano della trasformazione è $ab\rho$, otteniamo:

$$Vol = 2 \int\int_E c\sqrt{1-\rho^2} \cdot ab\rho \; d\rho d\vartheta = \ldots = \frac{4}{3}\pi abc.$$

11. Per fili:

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\},$$
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D, 0 < z < 1 - x - y\};$$
$$\int\int\int_T (x+z) dxdydz = \int\int_D \left(\int_0^{1-x-y} (x+z) dz \right) dxdy$$
$$= \int\int_D \left[xz + \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dxdy = \int\int_D \left[x(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right] dxdy$$
$$= \frac{1}{2} \int\int_D (1-x-y)(1+x-y) \, dxdy = \frac{1}{2} \int\int_D [(1-y)^2 - x^2] dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} [(1-y)^2 - x^2]dy\right) dx = \ldots = \frac{1}{12}.$$

Per strati:

$$D(z) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1-z, 0 < y < 1-x-z\},$$

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < z < 1, (x,y) \in D(z)\};$$

$$\int\int\int_T (x+z)dxdydz = \int_0^1 \left(\int\int_{D(z)} (x+z)dxdy\right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-x-z} (x+z)dy\right) dx\right) dz = \ldots = \frac{1}{12}.$$

12. D è una semisfera: è chiaro che converrà passare alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}.$$

L'elemento infinitesimo di volume è

$$dxdydz = \rho^2 \sin\varphi \; d\rho d\varphi d\vartheta,$$

mentre l'insieme di integrazione diventa il parallelepipedo rettangolo

$$E = \{(\rho,\varphi,\vartheta) \in \mathbf{R}^3 : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \vartheta \le 2\pi\}.$$

Con queste trasformazioni otteniamo

$$\int\int\int_D (x^2+y^2)dxdydz = \int\int\int_E \rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi \; d\rho d\varphi d\vartheta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left(\int_0^1 \rho^4 d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi\right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi(1-\cos^2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{2}{5}\pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi\right]$$

$$= \frac{2}{5}\left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{15}\pi.$$

13. Prima di tutto osserviamo che la funzione $f(x,y,z) = |xy|$ è pari sia rispetto alla variabile x che alla variabile y; inoltre, essendo un solido di rotazione, D è simmetrico sia rispetto al piano $x = 0$ che rispetto al piano $y = 0$: quindi possiamo scrivere

$$\int\int\int_D |xy|dxdydz = 2^2 \int\int\int_{D_1} xy \; dxdydz,$$

dove

$$D_1 = D \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y > 0\};$$

quando si ha a che fare con i solidi di rotazione è in generale conveniente utilizzare le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = t \end{cases} .$$

L'elemento infinitesimo di volume è

$$dxdydz = \rho \ d\rho d\varphi d\vartheta,$$

mentre l'insieme D_1 viene trasformato nel parallelepipedo rettangolo

$$F_1 = \{(\rho, \vartheta, t) \in \mathbf{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, -1 + \rho \leq t \leq 1\}.$$

Con queste trasformazioni otteniamo

$$\int\int\int_D |xy| dxdydz = 4 \int\int\int_{F_1} \rho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cdot \rho \ d\rho d\vartheta dt$$

$$= 4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right) \left(\int_1^2 \rho^3 \left(\int_{-1+\rho}^1 dt \right) d\rho \right)$$

$$= 4 \left[\frac{\sin^2 \vartheta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \rho^3 (2 - \rho) d\rho \right) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int_1^2 \left(2\rho^3 - \rho^4 \right) d\rho \right)$$

$$= 2 \left[\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^5}{5} \right]_1^2 = \frac{13}{5}.$$