Esercizi di Analisi II

Anno Accademico 2008-2009

Serie di Fourier

1. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della funzione, periodica di periodo π, definita da $f(x) = |\sin x|$ nell'intervallo $[0, \pi]$. Studiare poi la convergenza di tale serie.

2. Si determini la serie di Fourier associata alla funzione, periodica di periodo 2π, che nell'intervallo $]-\pi, \pi[$ è definita ponendo
$$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{se } -\pi < x < 0\,; \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$
Si studi poi la convergenza della serie ottenuta.

3. Si consideri la funzione, periodica di periodo 2, che sull'intervallo $[-1, 1[$ è definita ponendo $f(x) := x$: scrivere la serie di Fourier di f e studiarne la convergenza.

4. Determinare la serie di Fourier associata alla funzione, periodica di periodo 2π, che sull'intervallo $[-\pi, \pi[$ è definita ponendo $f(x) := x^2$.

   Facendo uso dello sviluppo trovato, si dimostri che
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

5. Si consideri la funzione, periodica di periodo 2π, definita in $]-\pi, \pi[$ ponendo
$$f(x) := \begin{cases} -2 & \text{se } -\pi < x < 0\,; \\ 0 & \text{se } x = 0\,; \\ 2 & \text{se } 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$
Scrivere la serie di Fourier associata a f e farne uso per calcolare la somma della serie numerica
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

6. Sia $F(x)$ l'applicazione a cui converge la serie di Fourier associata alla funzione, periodica di periodo 2π, definita in $[0, 2\pi[$ ponendo
$$f(x) := \begin{cases} 2x - \pi/2 & \text{se } 0 \le x < \pi/2\,; \\ \pi/2 & \text{se } -\pi/2 \le x \le \pi\,; \\ 0 & \text{se } \pi < x < 2\pi\,. \end{cases}$$
Si discuta la convergenza della serie e si scriva l'espressione esplicita di $F(x)$; si calcolino poi i coefficienti di Fourier della funzione f.

Cenni di soluzioni

1. La funzione assegnata è pari, quindi si sviluppa in serie di coseni; essa inoltre può essere pensata come funzione periodica di periodo 2π, in modo che i coefficienti si calcolano con le formule consuete.

   Si ha

2. In progress

3. La funzione è dispari, quindi si sviluppa in serie di soli seni. Inoltre

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin(n\pi x)dx = 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx\,.$$

   Il precedente integrale si calcola per parti, e risulta

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\,.$$

   La serie richiesta è pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\sin(n\pi x)\,.$$

4. In progress

5. Poiché f è dispari, lo sviluppo consta di soli seni.

   Risulta

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{4}{n\pi}\cdot\big[\cos(n\pi)-1\big] = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari}\,; \\ \dfrac{8}{n\pi} & \text{se } n \text{ è dispari}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

   La serie cercata è perciò

$$\frac{8}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\big[(2k+1)x\big]}{2k+1}\,.$$

   Per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

   faremo uso dell'identità di Parseval:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\,.$$

   Nel caso in esame, si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi(2k+1)}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}4dx\,,$$

ossia

$$\frac{64}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{\pi} \cdot 8\pi = 8\,,$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

6. In progress