Esercizi di Analisi II

Anno Accademico 2008-2009

Successioni e serie di funzioni. Serie di potenze

1. Studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ è definita ponendo
$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\,.$$

2. Studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove
$$f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

3. Studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove
$$f_n(x) = \frac{1+nx}{1+n^2x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

4. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme ed assoluta della serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty} \big[\arctan(x/n)\big]^n \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}(x)\,,$$
dove, per ogni insieme A, si pone:
$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A\,; \\ 0 & \text{se } x \notin A\,. \end{cases}$$

5. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme ed assoluta della seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}\,.$$

6. Si determini l'insieme A di convergenza puntuale della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\big(e^{-nx^2}\big)\,.$$
Si provi che su A non può esserci convergenza uniforme e si individuino dei sottoinsiemi di A sui quali la convergenza è uniforme.

7. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^2+n}{n^2}\,.$$

Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie.

Indicata con $F(x)$ la funzione somma della serie, discutere la continuità e la derivabilità di $F(x)$.

8. Calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{2^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{2^n}\,.$$

9. Determinare il raggio e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}\,.$$

10. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme, assoluta e totale della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-\sqrt{n}}\,.$$

11. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n^2+2)}\,.$$

12. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{x^{3n}}{3^n}\,.$$

13. Trovare il raggio e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\alpha}} \quad (\alpha>0)\,.$$

14. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{3^n+1}\,.$$

15. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n\,.$$

16. Studiare la convergenza puntuale, assoluta ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}} x^n .$$

17. Al variare del parametro reale $a \geq 0$, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} x^n .$$

18. Calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n .$$

19. Sviluppare in serie di potenze la funzione

$$f(x) = \frac{2x-8}{x^2-8x+12} ,$$

precisando il raggio di convergenza.

Calcolare poi $f^{(n)}(0)$ per ogni $n \geq 0$.

20. Determinare il raggio di convergenza e la somma delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot x^{2n-1} \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)} \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!} \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)} x^{2n} \tag{4}$$

21. Provare che, per ogni $x \in (-1,1)$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, risulta

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n ,$$

dove

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0\,; \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} & \text{se } n \geq 1\,. \end{cases}$$

22. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞, ma non è analitica.

Cenni di soluzioni

1. Per ogni $x \in [-1,1]$ si ha
$$\lim_n f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x| \,,$$
quindi la successione converge puntualmente alla funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = |x|$.
Per studiare la convergenza uniforme osserviamo che, per ogni intero $n \geq 1$ ed ogni punto $x \in [-1,1]$, si ha
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n \cdot \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|\right|} \,.$$
Essendo poi
$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \,,$$
si ottiene
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \,.$$
D'altra parte,
$$f_n(0) - f(0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \,.$$
Si conclude che
$$\sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \,,$$
donde
$$\lim_n \left[\sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)|\right] = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \,,$$
per cui la convergenza è anche uniforme.

2. In progress

3. In progress

4. Si osservi che
$$\left|\arctan(x/n) \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}(x)\right| \leq \arctan(1) = \frac{\pi}{4} < 1 \,.$$
Pertanto il termine $n-$esimo della serie si maggiora in modulo con $(\pi/4)^n$: dal criterio di Weierstrass segue allora la convergenza (totale) uniforme, assoluta e puntuale della serie su $\mathbb{R}$.

5. Evidentemente la serie non converge se $x = 1$.
Essendo poi
$$0 \leq \frac{1}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{n^2 x^2} \,,$$
la serie converge assolutamente e puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La convergenza uniforme in un insieme A implica la convergenza puntuale nei punti di accumulazione di A (Teorema del doppio limite): pertanto 0 non può essere di accumulazione per A in caso di convergenza uniforme su A. Viceversa, se 0 non è di accumulazione per A, si ha che $A \subseteq (-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, \infty)$ per qualche $\epsilon > 0$: pertanto

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2n^2} \leq \frac{1}{1+n^2\epsilon^2} \quad \forall x \in A\,,$$

donde la convergenza (totale) uniforme in A in virtù del criterio di Weierstrass.

6. Per $x = 0$ il termine generale della serie numerica ottenuta vale $\sin 1$ e non è infinitesimo, quindi non c'è convergenza.

   Se invece $x \in A := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha $0 < e^{-nx^2} < 1$, donde $0 < \sin\left(e^{-nx^2}\right) \leq e^{-nx^2}$: in tal caso, perciò, la serie numerica associata è maggiorata dalla serie geometrica di ragione e^{-x^2}, la quale converge perché $e^{-x^2} < 1$.

   Si conclude che la serie assegnata converge puntualmente su A.

   Indichiamo adesso con $S_k(x)$ la somma parziale $k-$esima della serie, cioè

$$S_k(x) := \sum_{n=1}^{k} \sin\left(e^{-nx^2}\right).$$

   Lo zero è punto di accumulazione dell'insieme A; inoltre ciascuna delle funzioni $S_k(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, quindi esiste finito il limite $\lim_{x\to 0} S_k(x)$, e anzi

$$\lim_{x\to 0} S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \sin 1 = k(\sin 1)\,.$$

   D'altra parte, la successione $(k \cdot \sin 1)_{k\geq 1}$ diverge: per il teorema del doppio limite, allora, la successione $(S_k)_{k\geq 1}$ non può convergere uniformemente in A, dunque la serie di funzioni assegnata non converge uniformemente in A.

   Si ha invece convergenza uniforme sugli insiemi della forma $\mathbb{R} \setminus (-\xi, \xi)$, dove $\xi > 0$: infatti, poiché

$$0 < e^{-nx^2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}\,,$$

   e poiché sull'intervallo $[0, \pi/2]$ la funzione seno è crescente, risulta

$$\sup_{x\in\mathbb{R}\setminus(-\xi,\xi)} \left|\sin(e^{-nx^2})\right| = \sin(e^{-n\xi^2}) \leq e^{-n\xi^2}\,.$$

   D'altra parte, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi^2}$ converge (si tratta di una serie geometrica di ragione $e^{-\xi^2} < 1$): di conseguenza, la serie assegnata converge totalmente, quindi uniformemente, su $\mathbb{R} \setminus (-\xi, \xi)$.

7. In progress

8. Essendo

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \cdot \sin(nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n .$$

Quest'ultima è una serie geometrica di ragione $e^{ix}/2$, la quale converge in quanto

$$\left|\frac{e^{ix}}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{ix}\right| = \frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} < 1 .$$

Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{ix}/2} = \frac{2}{2 - e^{ix}} = \frac{2}{(2 - \cos x) - i \cdot \sin x} =$$
$$= \frac{(4 - 2\cos x) + i(2\sin x)}{5 - 4\cos x} .$$

Si conclude che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n} = \frac{(4 - 2\cos x) + i(2\sin x)}{5 - 4\cos x} .$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie, si ottiene pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n} = \frac{4 - 2\cos x}{5 - 4\cos x} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n} = \frac{2\sin x}{5 - 4\cos x} .$$

9. Possiamo vedere questa serie $\sum_n f_n(x)$ come una serie di potenze con coefficienti

$$a_i := \begin{cases} 1 & \text{se } i = n! \text{ per qualche } n\,; \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

oppure come serie di funzioni generica. Chiaramente $0 \leq f_n(x) \leq x^n$, pertanto sicuramente converge puntualmente ed assolutamente in $(-1, 1)$ e uniformemente in $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$.

D'altro canto, $f_n(\pm 1) \not\to 0$ se $n \to \infty$, pertanto non converge puntualmente in $\{x : |x| \geq 1\}$.

Il raggio di convergenza è 1.

10. Raggio di convergenza 1. Convergenza puntuale in $[-1, 1)$ (si utilizzi il criterio di Leibniz in -1 dopo aver mostrato che la successione $\left(\frac{1}{n-\sqrt{n}}\right)_{n\geq 2}$ decresce. Convergenza assoluta in $(-1, 1)$. Convergenza uniforme (e totale) in A se e solo se $A \subseteq [-1 + \epsilon, 1 - \epsilon)$ per qualche $\epsilon > 0$.

11. Raggio di convergenza 2. Convergenza puntuale, assoluta ed uniforme (anche totale) in $[-2, 2]$ (per esempio, utilizzare il criterio di Weierstrass).

12. In progress

13. Raggio di convergenza 1 (per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$).

- $0 < \alpha \leq 1$. Convergenza puntuale in $[-1,1)$, assoluta in $(-1,1)$ ed uniforme (e totale) in A se e solo se $A \subseteq [-1+\epsilon, 1-\epsilon)$ per qualche $\epsilon > 0$.
- $1 < \alpha$. Convergenza puntuale, assoluta ed uniforme (e totale) in $[-1,1]$.

14. In progress

15. Ricordiamo la formula di De Moivre-Stirling $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$.

    Inoltre se $a_n \sim b_n$ (entrambe di segno definitivamente positivo) e $|k_n| \leq M$ ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $a_n^{k_n} \sim b_n^{k_n}$. Pertanto $\sqrt[n]{n!/n^n} \sim \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}/e^n} \to 1/e$, da cui $R = e$. Ai bordi si ha
    $$n!(\pm e)^n/n^n \sim (\pm 1)^n \sqrt{2\pi n} \not\to 0\,,$$
    quindi non c'è convergenza.

    C'è convergenze puntuale ed assoluta in $(-1,1)$ e convergenza uniforme in ogni insieme $A \subseteq [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ per qualche $\epsilon > 0$.

16. Calcoliamo
    $$\sqrt[n]{\frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}}} = \frac{(1-1/n^2)^n}{n^{3/(2n)}} \to 1\,,$$
    da cui $R = 1$.

    Ai bordi si deve calcolare
    $$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}}\,.$$
    Ora,
    $$\left| (\pm 1)^n \frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}} \right| = \frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}} \sim \frac{e}{n^{3/2}}\,,$$
    dunque si ha convergenza.

    Pertanto la serie converge puntualmente, assolutamente, uniformemente (e totalmente) in $[-1,1]$.

17. Se $a = 0$ chiaramente la serie è quella nulla.

    Se $a > 0$ si ha che $\lim_n \sqrt[n]{a^{\sqrt{n}}} = \lim_n a^{1/\sqrt{n}} = 1$, pertanto il raggio di convergenza della serie è 1.

    Ai bordi si hanno le due serie $\sum_n (\pm 1)^n a^{\sqrt{n}}$. Se $a \geq 1$ il termine $n-$esimo non tende a 0 quindi non c'è convergenza. Viceversa, se $a < 1$, allora si ha che
    $$0 \leq a^{\sqrt{n}} = \frac{a^{\sqrt{n}}}{1/n^2} \frac{1}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}\,,$$
    poiché $a^{\sqrt{n}} n^2 \to 0$ se $n \to \infty$ e quindi è limitata. Quindi si ha convergenza, per il criterio di Weierstrass. Pertanto

    - Se $a < 1$ si ha convergenza puntuale, assoluta, uniforme (e totale) su $[-1,1]$.
    - Se $a \geq 1$ si ha convergenza puntuale ed assoluta su $(-1,1)$ ed uniforme (e totale) su ogni insieme $A \subseteq [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ per qualche $\epsilon > 0$.

18. Osserviamo che $\sum_n nx^n = x\sum_n nx^{n-1}$, nel senso che le due serie hanno lo stesso carattere e il limite, dove esiste, soddisfa questa uguaglianza. Ovviamente

$$\sum_n nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\sum_n x^n = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}\,,$$

da cui

$$\sum_n nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

19. Si osservi che

$$\frac{2x-8}{x^2-8x+12} = \frac{2x-8}{(x-6)(x-2)} = \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-2}\,.$$

Essendo allora

$$\frac{1}{x-6} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-(x/6)} = \frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n\,,$$

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(x/2)} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\,,$$

di raggio rispettivamente 6 e 2, si ha

$$\frac{2x-8}{x^2-8x+12} = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{6^{n+1}}\right)x^n\,,$$

con raggio di convergenza 2.

Infine

$$f^{(n)}(0) = n!a_n = -n!\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6^{n+1}}\right)\,.$$

20. In progress

21. La serie di McLaurin associata alla funzione $(1+x)^\alpha$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\big[(1+x)^\alpha\big](0)\cdot x^n \qquad (*)$$

D'altra parte, un semplice ragionamento induttivo mostra che

$$\frac{d^n}{dx^n}\big[(1+x)^\alpha\big] = \alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \quad \forall n\geq 1\,,$$

dunque

$$\frac{d^n}{dx^n}\big[(1+x)^\alpha\big](0) = \alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n+1) \quad \forall n\geq 1\,.$$

La serie $(*)$ diviene allora

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\,.$$

Applicando il criterio del rapporto, si trova che il raggio di convergenza di questa serie è 1.

Per concludere, si deve provare che, nell'intervallo $(-1,1)$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ converge alla funzione $(1+x)^\alpha$. Posto

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall x \in (-1,1)\,,$$

si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1}\,,$$

da cui

$$(1+x) \cdot f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{h=0}^{\infty} \left[(h+1) \binom{\alpha}{h+1} + h \binom{\alpha}{h} \right] x^h\,.$$

Ma dalla definizione di $\binom{\alpha}{n}$ segue facilmente che

$$(h+1) \binom{\alpha}{h+1} + h \binom{\alpha}{h} = \alpha \binom{\alpha}{h}\,.$$

Di conseguenza

$$(1+x) \cdot f'(x) = \alpha \cdot \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\alpha}{h} x^h = \alpha \cdot f(x)\,.$$

Posto allora

$$g(x) := \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x) \cdot (1+x)^\alpha - \alpha \cdot f(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \\ &= \frac{(1+x)^{\alpha-1}\big[(1+x) \cdot f'(x) - \alpha \cdot f(x)\big]}{(1+x)^{2\alpha}} = 0\,, \end{aligned}$$

così che $g(x) = \lambda$, dove λ è una costante. Pertanto

$$f(x) = \lambda (1+x)^\alpha\,.$$

Ma $f(0) = 1 = \lambda$, per cui

$$f(x) = (1+x)^\alpha\,.$$

Questo conclude la dimostrazione.

22. In progress