Esercizi di Analisi II

Anno Accademico 2008-2009

Serie numeriche

1. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie a termini positivi tale che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia decrescente: allora tale serie converge se e solo se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$.

2. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}\,.$$

3. Discutere il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\log\alpha)^n \qquad \alpha \in \,]0,+\infty[\tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{5}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}} \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin\frac{1}{n} \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+2} \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\cos(\pi n)}{n^3+3} \tag{10}$$

4. Determinare il carattere della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, dove

$$x_n := \begin{cases} 1/n & \text{se } n \text{ dispari}\,; \\ -1/n^2 & \text{se } n \text{ pari}\,. \end{cases}$$

Cenni di soluzioni

1. Poniamo $y_n := 2^n \cdot x_{2^n}$.

   Per ogni numero intero $n \geq 0$ si ha

$$\sum_{h=2^n}^{2^{n+1}-1} x_h \leq 2^n \cdot x_{2^n} = y_n\,.$$

   Infatti, la sommatoria consta di $2^{n+1} - 1 - 2^n + 1 = 2^n$ termini, il primo dei quali è x_{2^n}, mentre gli altri sono $\leq x_{2^n}$ perché la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

   Pertanto

$$\sum_{h=2^n}^{2^{n+1}-1} x_h \leq \sum_{h=2^n}^{2^{n+1}-1} x_{2^n} = 2^n \cdot x_{2^n} = y_n\,,$$

   come richiesto.

   Similmente, per ogni $n \geq 1$ risulta

$$\sum_{h=2^{n-1}+1}^{2^n} x_h \geq 2^{n-1} \cdot x_{2^n} = \frac{1}{2} y_n\,.$$

   Infatti, nella sommatoria vi sono $2^n - (2^{n-1} + 1) + 1 = 2^{n-1}$ termini, l'ultimo dei quali è x_{2^n}, mentre gli altri sono $\geq x_{2^n}$ perché la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

   Di conseguenza,

$$\sum_{h=2^{n-1}+1}^{2^n} x_h \geq \sum_{h=2^{n-1}+1}^{2^n} x_{2^n} = 2^{n-1} \cdot x_{2^n} = \frac{1}{2} y_n\,.$$

   Ora, se la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ è convergente, si ha

$$\sum_{h=0}^{2^{n+1}-1} x_h = x_0 + \sum_{h=2^0}^{2^{n+1}-1} x_h = x_0 + \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{h=2^k}^{2^{k+1}-1} x_h \Big) \leq x_0 + \sum_{k=0}^{n} y_k\,,$$

   per cui la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ non può divergere.

Se invece la serie $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ è positivamente divergente, si ha

$$\sum_{h=0}^{2^n} x_h = x_0 + x_1 + \sum_{h=2^0+1}^{2^n} x_h = x_0 + x_1 + \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{h=2^{k-1}+1}^{2^k} x_h\Big) \geq$$
$$\geq x_0 + x_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} y_k = x_0 + x_1 - \frac{1}{2} y_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} y_k \,,$$

quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ non può essere convergente.

2. In progress

3. Il termine generale della serie (1) si può scrivere come somma di frazioni semplici:

$$\frac{2}{n^2+2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \,.$$

La somma parziale $n-$esima della serie è allora

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) =$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \,.$$

Si conclude che la serie converge al numero $3/2$.

La serie (2) non converge, perché il limite

$$\lim_n \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \right]$$

non esiste.

La (3) è convergente, in quanto somma delle serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n \,,$$

che convergono. La somma è $25/6$.

La serie (4) è geometrica di ragione $\log \alpha$, quindi converge per $|\log \alpha| < 1$, ossia per $1/e < \alpha < e$, al valore

$$\frac{1}{1-\log \alpha} \,.$$

Alla (5) si può applicare il criterio del rapporto: si ha

$$\lim_n \frac{\big[2(n+1)\big]!}{\big[(n+1)!\big]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_n \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} = 4 > 1 \,,$$

quindi la serie diverge.

Quanto alla (6), essendo

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{1/2}}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0\,,$$

dal criterio della radice segue che la serie converge.

La serie (7) è convergente: infatti, essendo $|\sin n| \leq 1$, risulta

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}\,,$$

e poiché la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ è convergente, la tesi segue dal criterio del confronto.

La (8) è una serie a termini di segno alterno, che converge per il criterio di Leibniz: infatti la successione $\big(\sin(1/n)\big)_{n\geq 1}$ è decrescente e tale che

$$\lim_n \sin\frac{1}{n} = 0\,.$$

La serie (9) converge anch'essa per il criterio di Leibniz.

Infine, la (10) si può scrivere nella forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n^3+3}\,.$$

Essa converge assolutamente per il criterio del confronto, perché

$$\frac{\sqrt{n}}{n^3+3} < \frac{1}{n^{5/2}}\,,$$

e la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [1/n^{5/2}]$ è convergente.

4. La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [1/4n^2]$ è convergente: indicata allora con c la sua somma, risulta

$$S_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i^2} \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} - c\,,$$

ed essendo $1/(2n+1) \sim 1/2n$ (la quale diverge) si ha che $S_{2n+1} \to +\infty$ se $n \to +\infty$, quindi la serie assegnata non converge.

Si potrebbe inoltre osservare che

$$S_{2n+2} \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} - c\,.$$

Pertanto la serie non solo non converge, ma diverge a $+\infty$.