

# Esercizi/domande su media campionaria, teorema del limite centrale e legge dei grandi numeri

Daniela Bertacchi  
Fabio Zucca

## Quiz sui teoremi di approssimazione

La media campionaria è

- A) un numero;
- B) una variabile aleatoria;
- C) una probabilità;
- D) un evento.

## Quiz sui teoremi di approssimazione

Data una successione  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  di variabili aleatorie i.i.d. con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ , è necessariamente vero che:

- A)  $X_n$  tende a una legge  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ;
- B) la media campionaria  $\bar{X}_n$  ha legge  $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ;
- C) la media campionaria  $\bar{X}_n$  tende a una legge  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ;
- D)  $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  tende a una  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

## Quiz sui teoremi di approssimazione

Sia  $X_1, X_2, \dots$  una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) con valore atteso  $\mu = 2$  e varianza  $\sigma^2 = 1$  e sia  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Allora per ogni  $\epsilon > 0$

A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \epsilon\right) = 1;$

B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \epsilon\right) = 0;$

C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right) = 0;$

D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 1\right| > \epsilon\right) = 1.$

## Quiz sui teoremi di approssimazione

Sia  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una successione di v.a.

Quali di queste ipotesi sono necessarie per il teorema del limite centrale?

- A) le  $X_i$  sono v.a. normali;
- B) le  $X_i$  sono v.a. indipendenti;
- C) le  $X_i$  sono v.a. di Bernoulli;
- D) le  $X_i$  sono v.a. con la stessa legge;
- E) le  $X_i$  hanno valore atteso finito;
- F) le  $X_i$  hanno varianza finita;
- G) le  $X_i$  hanno varianza positiva.

## Quiz sui teoremi di approssimazione

Sia  $X_1, X_2, \dots$  una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) con valore atteso 5 e varianza 4 e siano  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ,  $\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$  e  $\Phi$  la funzione di ripartizione della normale standard. Quali di queste affermazioni sono sempre vere?

- A)  $P\left(\frac{\bar{X}_n - 5}{2/\sqrt{n}} \leq t\right) \approx \Phi(t);$
- B)  $P\left(\frac{\sqrt{n}}{2}(\bar{X}_n - 5) > t\right) \approx 1 - \Phi(t);$
- C)  $P(\bar{X}_n - 5 \cdot \sqrt{n} \leq t) \approx \Phi(t);$
- D)  $P(S_n \leq t) \approx \Phi\left(\frac{t - 5n}{2\sqrt{n}}\right);$
- E)  $P(|\bar{X}_n| \leq t) \approx 2\Phi\left(\frac{t-5}{2}\sqrt{n}\right) - 1;$
- F)  $P(|\bar{X}_n| \leq t) \approx 2\Phi(t) - 1;$
- G)  $P(|\bar{X}_n| \leq t) \approx 2\Phi\left(\frac{t-5}{2}\right) - 1.$

## Quiz sui teoremi di approssimazione

Sia  $X$  una v.a. con valore atteso 3 e varianza 16. Quali di queste affermazioni sono sempre vere?

A)  $P(4 - 2 \cdot 3 < X < 4 + 2 \cdot 3) \geq 0.75$ ;

B)  $P(3 - 2 \cdot 4 < X < 3 + 2 \cdot 4) \geq 0.75$ ;

C)  $P(X \leq 3 - 5 \cdot 4) + P(X \geq 3 + 5 \cdot 4) \leq 0.25$ ;

D)  $P(X \leq 4 - 5 \cdot 3) + P(X \geq 4 + 5 \cdot 3) \leq 0.04$ .

## Definizioni

Dare la definizione di media campionaria.



## TLC, Chebychev e LGN

Enunciare i seguenti teoremi.

- 1 Teorema del limite centrale.
- 2 Disuguaglianza di Chebychev.
- 3 Legge dei grandi numeri.

## Esercizio sul teorema del limite centrale

Sia  $\{X_n\}_n$  una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite, con  $E(X_1) = 3/4$  e  $\text{Var}(X_1) = 4$ . Posto  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , calcolare (in dipendenza da  $a$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \frac{|\bar{X}_n - 3/4|}{1/\sqrt{n}} \leq a \right).$$

Dire quanto vale questo limite per  $a = 3/4$ .

## Esercizio sul teorema del limite centrale

Ad una battuta di caccia ai confini della realtà partecipano 200 cacciatori. Ognuno di essi ha una probabilità pari a 0.05 di essere impallinato da una preda prima della fine della giornata.



- a. Scegliere un modello per la v.a.  $X$  = numero di cacciatori impallinati entro la fine della giornata e dire quali ipotesi di indipendenza vanno fatte.
- b. Calcolare con un'opportuna approssimazione la probabilità che alla fine della giornata vi siano più di 20 cacciatori impallinati.