

Variabili di Poisson

Variabili di Poisson:
behind the scenes
Valore atteso
Varianza
Somma di variabili di
Poisson indipendenti

Processo di Poisson

Definizione
Esempi

Variabili di Poisson

Si costruisce come *limite in legge* di una successione di variabili binomiali



In che modo?

Sia $X_k \sim \mathcal{B}(n_k, p_k)$ dove $n_k \rightarrow \infty$ e $n_k p_k \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ se $k \rightarrow \infty$. Allora

$$\mathbb{P}(X_k = i) = \binom{n_k}{i} p_k^i (1 - p_k)^{n_k - i}$$

per $i = 0, \dots, n$.

Ricordiamo che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\alpha_k}{n_k}\right)^{n_k} = e^{-\alpha}$$

se $\alpha_k \rightarrow \alpha$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p_k)^{n_k - i} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{p_k(n_k - i)}{n_k - i}\right)^{n_k - i} = e^{-\lambda},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_k!}{(n_k - i)!} p_k^i = \lim_{n \rightarrow +\infty} n_k \lambda \cdots (n_k - i + 1) \lambda = \lambda^i,$$

pertanto

$$\mathbb{P}(X_k = i) \Rightarrow \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

Binomiali e Poisson

Variabili di Poisson

Variabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

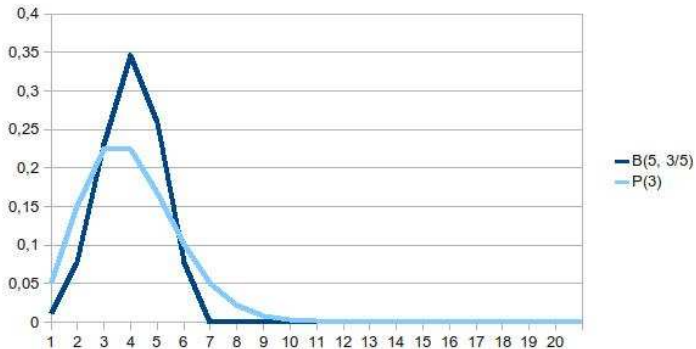
Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendenti

Processo di Poisson

Definizione

Esempi



Binomiali e Poisson

Variabili di Poisson

Variabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

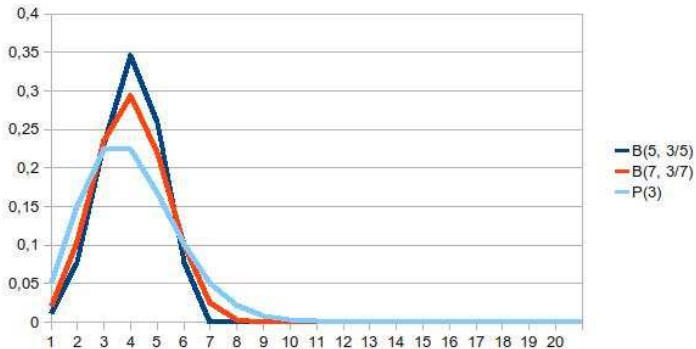
Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendenti

Processo di Poisson

Definizione

Esempi



Binomiali e Poisson

Variabili di Poisson

Variabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

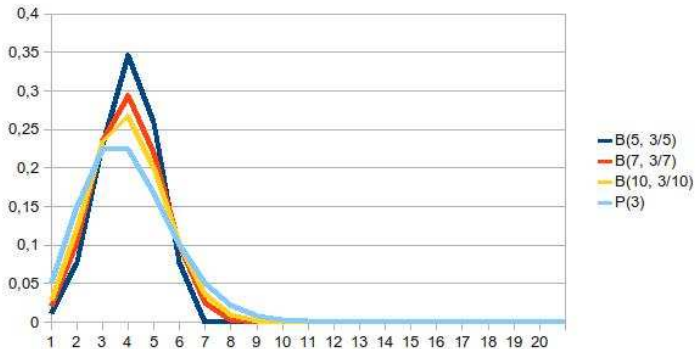
Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendenti

Processo di Poisson

Definizione

Esempi



Binomiali e Poisson

Variabili di Poisson

Variabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

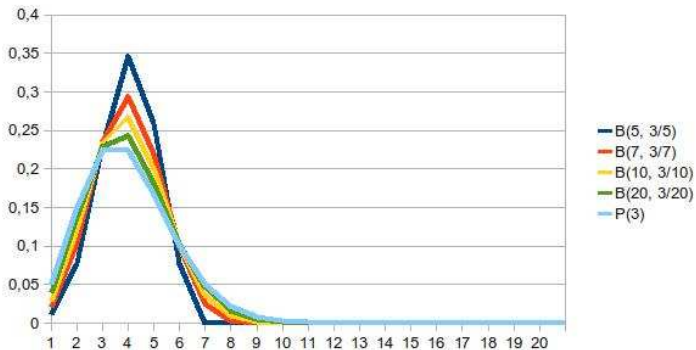
Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendenti

Processo di Poisson

Definizione

Esempi



Binomiali e Poisson

Variabili di Poisson

Variabili di Poisson: behind the scenes

Valore atteso

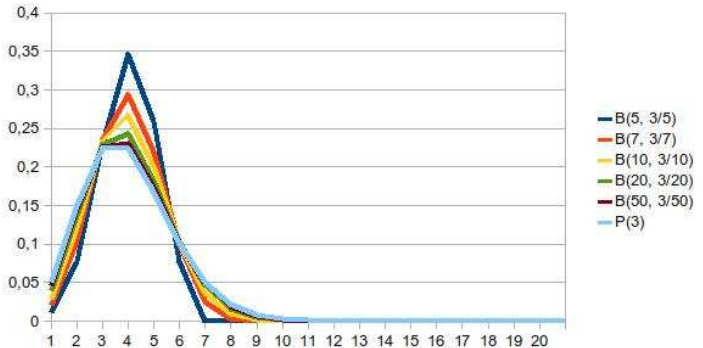
Varianza

Somma di variabili di Poisson indipendenti

Processo di Poisson

Definizione

Esempi



Variabili di Poisson

DEFINIZIONE DI V.A. $\mathcal{P}(\lambda)$

Una variabile X si dice di Poisson di parametro $\lambda > 0$ se

$$\mathbb{P}(X = i) = \begin{cases} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} & i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si scrive pertanto $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Variabili di
PoissonVariabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendentiProcesso di
Poisson

Definizione

Esempi

Esempi di variabili di Poisson

- 1 il numero di automobili che passa per un determinato incrocio in un determinato intervallo di tempo;
- 2 il numero di persone che si reca in un negozio in un giorno feriale;
- 3 il numero di guasti che si verificano in un impianto in un giorno lavorativo;
- 4 il numero di pixel difettosi di uno schermo a cristalli liquidi;

Variabili di
PoissonVariabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendentiProcesso di
Poisson

Definizione

Esempi

Valore atteso

Calcoliamo il valore atteso della legge di Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \lambda\end{aligned}$$

Valore atteso

Il valore atteso di una variabile $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ è λ .

Calcoliamo la varianza

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_X(k) - \mathbb{E}(X)^2 \\&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} - \lambda^2 \\&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathbb{E}(X) - \lambda^2 \\&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda - \lambda^2 \\&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.\end{aligned}$$

Varianza

La varianza di una variabile $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ è λ .

Esempi di variabili di Poisson

Variabili di Poisson

Variabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendenti

Processo di Poisson

Definizione

Esempi

Un filo di rame di lunghezza L_0 metri possiede delle imperfezioni. Sappiamo che in media si verificano λ imperfezioni ogni L_0 metri, e che le posizioni delle imperfezioni sul filo sono variabili casuali indipendenti. Vogliamo sapere la funzione di probabilità della v.a. *numero di imperfezioni* del filo di lunghezza L_0 .

Ha legge $\mathcal{P}(\lambda)$.

E la legge di probabilità della v.a. *numero di imperfezioni* di un filo dello stesso tipo di lunghezza L ?

Ha legge $\mathcal{P}(\lambda L/L_0)$; cioè lo stesso tipo di legge ma con parametro (cioè valore atteso) riscalato (daremo qualche cenno tra poco).

Esempio

Variabili di
PoissonVariabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendentiProcesso di
Poisson

Definizione

Esempi

Supponiamo che il numero di telefonate medio che arrivano ad un centralino in un giorno sia 10. Ci chiediamo quale sia la probabilità che in 3.5 giorni ne arrivino 25.

Sappiamo che il parametro della variabile di Poisson X che governa il numero di telefonate in un giorno è 10.

La variabile X_α che governa il numero di telefonate in α giorni è ancora di Poisson con parametro riscalato 10α . Da cui $X_\alpha \sim \mathcal{P}(35)$.

Pertanto

$$\mathbb{P}(X_{(0,3.5]} = 25) = e^{-35} \frac{35^{25}}{35!} \approx 2.44 \cdot 10^{-17}.$$

Teorema

Siano X_1, \dots, X_n v.a. indipendenti con legge di Poisson $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ (λ_i possono essere diversi tra loro). Allora

$$X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

Nota

Se $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $n > 1$ allora non è vero che $nX \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

Perchè?

X non è indipendente da se stessa; in particolare nX assume solo valori interi multipli di n .

Variabili di
PoissonVariabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendentiProcesso di
Poisson

Definizione

Esempi

Processo di Poisson

Riprendiamo l'esempio precedente e chiediamoci come si modifica la variabile aleatoria che governa il numero delle imperfezioni in L metri al variare della lunghezza L ?

Quello che ci si aspetta è che sezioni disgiunte del filo si comportino tutte come Poisson indipendenti tra loro e che, per esempio, a lunghezza uguale corrisponda parametro della legge di Poisson uguale (uniformità del filo).

Queste condizioni sono compatibili e danno origine ad una famiglia di variabili aleatorie (**Processo di Poisson**).

Processo di Poisson

DEFINIZIONE DI Processo di Poisson

Sia (X, Σ, μ) uno spazio con misura μ . Una famiglia di variabili aleatorie $\{X_\Delta\}_{\Delta \in \Sigma}$ si dice *processo di Poisson di intensità μ* se e solo se

- 1 Se $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ sono disgiunti allora $X_{\Delta_1}, \dots, X_{\Delta_n}$ sono indipendenti;
- 2 $X_\Delta \sim P(\mu(\Delta))$;
- 3 $\Delta \rightarrow X_\Delta(\omega)$ è una misura di conteggio per ogni $\omega \in \Omega$ (i.e. esiste $A = A_\omega$ tale che $\mu(B) = \#A \cap B$).

Misura

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) se $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ è una collezione di insiemi di X misurabili (cioè appartenenti a Σ) tali che $i \neq j$ implica $A_i \cap A_j = \emptyset$ allora $\mu(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.

Processo di Poisson

Processo di Poisson

 (X, Σ, μ)

- 1 Se $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ sono disgiunti allora $X_{\Delta_1}, \dots, X_{\Delta_n}$ sono indipendenti;
- 2 $X_{\Delta} \sim P(\mu(\Delta))$.

Esempi.

- 1 Imperfezioni del filo: X =punti del filo, Σ =sottoinsiemi del filo (contenenti gli intervalli), $\mu(A)$ =proporzionale alla lunghezza del sottoinsieme A del filo.
- 2 Telefonate al centralino: $X = [0, +\infty)$ (asse temporale), Σ =sottoinsiemi di X (contenenti gli intervalli temporali), $\mu(A)$ =proporzionale alla lunghezza dell'intervallo temporale A .

Processo di Poisson

Variabili di Poisson

Variabili di Poisson:
behind the scenes

Valore atteso

Varianza

Somma di variabili di
Poisson indipendenti

Processo di Poisson

Definizione

Esempi

Processo di Poisson

(X, Σ, μ)

- 1 Se $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ sono disgiunti allora $X_{\Delta_1}, \dots, X_{\Delta_n}$ sono indipendenti;
- 2 $X_{\Delta} \sim P(\mu(\Delta))$.

Esempi.

- 3 Difetti di una lastra bidimensionale: X =punti della lastra, Σ =sottoinsiemi della lastra, $\mu(A)$ =proporzionale all'area della lastra.

Nota

Non è necessario che $\mu(A)$ sia proporzionale ad una misura nota di A (lunghezza, peso, area ecc.); in questo modo si modellizzano anche oggetti disomogenei.