

# Esercizi/domande su indipendenza e probabilità condizionata

Daniela Bertacchi  
Fabio Zucca

## Primo quiz

Se  $A$  e  $B$  sono due eventi tali che  $A \cap B = \emptyset$ , allora necessariamente:

- A)  $A$  e  $B$  sono indipendenti;
- B)  $A$  e  $B$  sono eventi impossibili;
- C)  $A \cup B = \Omega$ ;
- D)  $A$  e  $B$  non si possono verificare contemporaneamente.

## Probabilità condizionata

Sia  $A$  un evento. Allora è sempre vero che  $P(\emptyset|A)$  è:

- A) non definita;
- B)  $P(A)$ ;
- C) 1;
- D) 0.

## Definire $P(A|B)$

Cosa è necessario avere per poter definire  $P(A|B)$ ?

- A) due eventi  $A$  e  $B$  qualsiasi;
- B) due eventi  $A$  e  $B$  non disgiunti;
- C) due eventi  $A$  e  $B$  con  $P(A) > 0$ ;
- D) due eventi  $A$  e  $B$  con  $P(B) > 0$ .

## L'insieme $\emptyset$

Sia  $A = \emptyset$ , allora

- A)  $A$  è anche una variabile aleatoria;
- B)  $A$  è l'evento certo;
- C)  $A$  è indipendente da qualsiasi altro evento;
- D)  $A$  non può essere indipendente da alcun altro evento.

## Bayes

Ad un certo esame  $\frac{4}{5}$  degli studenti non viene promosso, inoltre gli studenti che non hanno studiato sono i  $\frac{9}{11}$  del totale; e se consideriamo solo gli studenti che non vengono promossi, di questi i  $\frac{9}{10}$  non hanno studiato. Sapendo che uno studente non ha studiato, qual è la sua probabilità di non essere promosso? (Suggerimento: riscrivere tutto come eventi e probabilità di eventi...).

- A)  $\frac{9}{10}$ ;   B)  $\frac{36}{55}$ ;   C)  $\frac{22}{25}$ ;   D)  $\frac{4}{5}$ .

## Probabilità condizionata

Sia  $\Omega$  uno spazio campionario e sia  $A$  un evento. Allora è sempre vero che  $P(\Omega|A)$  vale:

- A) 1;
- B) 0;
- C)  $P(A|\Omega)$ ;
- D)  $P(A)$ .

## Definizioni

- 1 Come è definita la probabilità di  $A$  dato  $B$ ? Facciamo qualche ipotesi sui due eventi?
- 2 Quando due eventi  $A$  e  $B$  si dicono indipendenti?



# Teoremi

- 1 Enunciare il teorema delle probabilità totali.
- 2 Enunciare il teorema della formula di Bayes.

## Hardy-Weinberg

Un gene in una popolazione diploide ha due alleli,  $A$  e  $a$ , dunque gli individui possono essere  $AA$ ,  $Aa$  oppure  $aa$ .

Le frequenze dei tre genotipi sono rispettivamente  $p$ ,  $q$  e  $r$  ( $p + q + r = 1$ ).

Quali sono le frequenze dei tre genotipi  $AA$ ,  $Aa$  e  $aa$  quando si raggiunge l'equilibrio di Hardy-Weinberg? Dopo quante generazioni si raggiunge?

Scrivere le tre frequenze di equilibrio se  $p = 0.7$ ,  $q = 0.2$  e  $r = 0.1$ .

## Esercizio su indipendenza

Siano  $A$  e  $B$  due eventi indipendenti, con  $P(A) = 0.2$  e  $P(B) = 0.7$ . Quanto vale la probabilità di  $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ ?

## Esercizio su Bayes (ecologia)

In un parco vive una popolazione di daini. Questa popolazione può essere suddivisa in tre sottofamiglie così riconoscibili:

- M = daini maculati (con molte macchioline bianche)
- R = daini rossicci
- O = daini con orecchie più grandi.

M rappresenta il 60% dell'intera popolazione, R il 30% e O il restante 10%. I daini sono soggetti ad una malattia, la BAB e si sa che dei daini M il 20% ha la BAB, degli R il 12% e degli O solo il 3%.

Qual è la probabilità che un daino scelto a caso abbia la BAB?  
Qual è la probabilità che un daino malato sia maculato?

## Esercizio su Bayes (genetica)

Alcuni caratteri somatici sono regolati da una coppia di geni, ognuno dei quali può essere dominante ( $d$ ) o recessivo ( $r$ ). Ad esempio, semplificando, il colore degli occhi dominante è il marrone, quello recessivo è l'azzurro. Solo gli individui con entrambi i geni recessivi ( $rr$ ) presentano somaticamente il carattere recessivo (cioè hanno gli occhi azzurri), gli altri presentano il carattere dominante (cioè hanno gli occhi marroni). Inoltre i figli ricevono, in maniera casuale, un gene da ciascuno dei genitori. Rispondere alle due domande seguenti, esplicitando le ipotesi di indipendenza necessarie.

- a. Se due genitori  $rd$  hanno un figlio, qual è la probabilità che questi presenti il tratto somatico recessivo (cioè sia  $rr$ )?
- b. Se due genitori  $rd$  hanno 4 figli, qual è la probabilità che di essi esattamente 3 presentino il tratto somatico dominante?

## Esercizio su probabilità totali

Abbiamo due urne, l'urna **A** e l'urna **B**. L'urna **A** contiene tre palline nere e due palline bianche; l'urna **B** contiene due palline nere e tre palline bianche. Procediamo ad una estrazione nel seguente modo: lanciamo un dado e se esce 1 oppure 2 peschiamo dall'urna **A**, se esce un altro numero peschiamo dall'urna **B**.

Qual è la probabilità di pescare una pallina nera?