

## Esercizio 1

Si consideri la seguente funzione reale, dipendente dal parametro reale  $k \geq 0$ ,

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x) & x \in [0, k] \\ 0 & x \notin [0, k] \end{cases}$$

- 1 Calcolare  $k$  affinché la funzione data sia una densità di una variabile aleatoria continua (sia essa  $X$ ).
- 2 Calcolare la funzione di ripartizione di  $X$ .
- 3 Calcolare il valore atteso di  $X$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

## Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

- 1) La condizione  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$  è equivalente a
- $$1 = \int_0^k \sin(x) dx = 1 - \cos(k) \text{ cioè, sotto l'ipotesi } k \geq 0,$$
- $k = (i + 1/2)\pi$  con  $i \in \mathbb{N}$ . Ma poiché  $f$  non può essere negativa in alcun intervallo aperto, si ha che  $k = \pi/2$ .

## Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

2)

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \cos(t) & t \in (0, \pi/2) \\ 1 & t \geq \pi/2. \end{cases}$$

2) Il valore atteso

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx = \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx \\ &= -x \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} = 1 \end{aligned}$$

## Esercizio 2

Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} c \log(x), & \text{per } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{per } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

- 1 Determinare i valori di  $c \in \mathbb{R}$  che rendono  $f$  una funzione di densità. Sia  $X$  una variabile continua di legge  $f$ ; calcolare media e varianza di  $X$ .
- 2 Se  $\{X_i\}_{i=1}^{40}$  sono variabili indipendenti e di legge  $f$ , calcolare  $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \geq 9\right)$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

## Soluzione es.2

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

1) Le condizioni necessarie e sufficienti sono

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \\ f \geq 0. \end{cases}$$

In questo caso essendo la funzione a segno costante, la prima condizione implica la seconda quindi, integrando per parti,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = c \int_0^1 \log(x)dx = cx(\log(x) - 1)|_0^1 = -c$$

da cui  $c = -1$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

## 1) Inoltre

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = - \int_0^1 x \log(x)dx \\ &= x^2(1/2 - \log(x))/2 \Big|_0^1 = 1/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = - \int_0^1 x^2 \log(x)dx \\ &= x^3(1/3 - \log(x))/3 \Big|_0^1 = 1/9 \end{aligned}$$

da cui

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7/144.$$

## Soluzione es.2

### 2) Utilizzando il TLC

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \geq 9\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{40} X_i - 40/4}{\sqrt{40 \cdot 7/144}} \geq \frac{9 - 40/4}{\sqrt{40 \cdot 7/144}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{70}}\right) \approx \Phi(0.7171) \\ &\approx 0.7634.\end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

## Esercizio 3

Si consideri la seguente famiglia di funzioni dipendenti da un parametro

$$f_c(x) := \begin{cases} c + x & x \in [0, 1]; \\ 3x^2/2 - c & x \in [-1, 0) \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

- 1 Determinare tutti i valori di  $c \in \mathbb{R}$  tali che  $f_c$  sia una funzione di densità di probabilità.
- 2 Detta  $X$  una variabile continua con densità  $f_c$  (dove  $c$  soddisfa il punto precedente) si calcolino il valore atteso e la varianza di  $X$ .
- 3 Calcolare  $\mathbb{P}(|X| > 1/2)$ .



## Soluzione es.3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

- 1) La prima condizione  $\int_{\mathbb{R}} f_c(x)dx$  è sempre soddisfatta, infatti

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_c(x)dx &= \int_0^1 (c+x)dx + \int_{-1}^0 (3x^2/2 - c)dx \\ &= (x^2/2 + cx)|_0^1 + (x^3/2 - cx)|_{-1}^0 = 1.\end{aligned}$$

La seconda condizione,  $f_c(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  equivale a  $c = 0$ . Pertanto la condizione richiesta è  $c = 0$ .

## Soluzione es.3

2) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_0(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_{-1}^0 3x^3/2 dx \\ &= 1/3 + 3/8 = 17/24 \approx 0.70833\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_0(x) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_{-1}^0 3x^4/2 dx \\ &= 1/4 + 3/10 = 11/20 = 0.55,\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 11/20 - (17/24)^2 \\ &= 0.04826389.\end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

## Soluzione es.3

3) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X| > 1/2) &= \mathbb{P}(X > 1/2) + \mathbb{P}(X < -1/2) \\ &= \int_{1/2}^1 f_0(x)dx + \int_{-1}^{-1/2} f_0(x)dx \\ &= \int_{1/2}^1 xdx + \int_{-1}^{-1/2} 3x^2/2dx \\ &= 1/2 - 1/8 + 1/2 - 1/16 = 13/16 \\ &= 0.8125.\end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

**Esercizio 3**

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

## Esercizio 4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

- 1 Determinare  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $f$  sia una funzione di densità.
- 2 Esistono il valore atteso e la varianza di  $X$ ? Se sì, calcolarli.

## Soluzione es.4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

①  $f \geq 0$  e  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^2} dx = \left(-\frac{c}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} = c$ . Di conseguenza, è necessario e sufficiente che  $c = 1$ .

② Il valore atteso non è finito

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

## Esercizio 5

La funzione di densità del tempo (in ore) di rottura di una componente elettronica sia data da

$$f(x) = \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}}, \text{ per } x > 0.$$

- ① Determinare la probabilità che tale componente duri più di 3000 ore prima di rompersi.
- ② Determinare la probabilità che tale componente si rompa nell'intervallo di tempo tra 1000 e 2000 ore.
- ③ Determinare la probabilità che tale componente si rompa prima di 1000 ore.
- ④ Determinare il numero di ore in cui con probabilità pari al 10% il componente si è rotto.

## Soluzione es.5

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

$$\textcircled{1} P(X > 3000) = \int_{3000}^{+\infty} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = \left( -e^{-\frac{x}{1000}} \right) \Big|_{3000}^{+\infty} = e^{-3}$$

$$\textcircled{2} P(1000 < X < 2000) = \int_{1000}^{2000} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = -e^{-2} + e^{-1}$$

$$\textcircled{3} P(X < 1000) = \dots = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\textcircled{4} P(X \leq y) = \int_0^y \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = -e^{-y/1000} + 1 = 0.1$$

allora  $y = -1000 \ln(0.9) \approx 105.36$ .

## Esercizio 6

Sia

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2, \text{ per } -1 < x < 1.$$

Determinare:

- 1  $\mathbb{P}(X > 0)$
- 2  $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})$
- 3  $\mathbb{P}(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$ ,  $\mathbb{P}(|X| \leq \frac{1}{2})$  e  $\mathbb{P}(|X| \geq \frac{1}{2})$
- 4  $\mathbb{P}(X < -2)$
- 5  $\mathbb{P}(X < 0 \text{ oppure } X > -\frac{1}{2})$
- 6 il valore  $y \in \mathbb{R}$  tale che  $\mathbb{P}(X > y) = 0.05$



## Soluzione es.6

Esercizio 1

$$\textcircled{1} \mathbb{P}(X > 0) = \int_0^1 f(x) dx = \left( \frac{x^3}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2

$$\textcircled{2} \mathbb{P}(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \left( \frac{x^3}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{7}{16}$$

Esercizio 3

$$\textcircled{3} P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(|X| \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

Esercizio 4

$$\textcircled{4} \mathbb{P}(|X| \geq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X \leq -\frac{1}{2} \text{ oppure } X \geq \frac{1}{2}) = 1 - \mathbb{P}(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$$

Esercizio 5

$$\textcircled{5} \mathbb{P}(X < -2) = 0$$

Esercizio 6

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \mathbb{P}(X < 0 \text{ oppure } X > -\frac{1}{2}) &= \\ \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X > -\frac{1}{2}) - \mathbb{P}(-\frac{1}{2} < X < 0) &= \\ = \frac{1}{2} + \frac{9}{16} - \frac{1}{16} &= 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} y \text{ deve risolvere: } 1 - \frac{y^3}{2} = 0.1. \text{ Si ottiene } y = 0.965$$