

# Esercizi/domande su processo di Bernoulli

Daniela Bertacchi  
Fabio Zucca

## Binomiale

Sia  $X$  una variabile aleatoria con legge  $\mathcal{B}(n, p)$ . Allora  $p$  è

- A) la probabilità di ottenere 0 successi;
- B) la probabilità di ottenere  $n$  successi;
- C) il parametro che elevato alla  $k$  dà  $P(X = k)$  per ogni  $k$ ;
- D) la probabilità di successo in una qualsiasi delle  $n$  prove.

## Binomiale

Sia  $X \sim \mathcal{B}(40, 0.1)$ . Se indico con  $f_X(k)$  la sua densità discreta, allora si ha che:

A)  $f_X(40) > 0$ ;

B)  $f_X(40) = \binom{40}{4} 0.1^4 0.9^{20}$ ;

C)  $f_X(0) = 0$ ;

D)  $f_X(20) = \binom{20}{20} 0.1^{20} 0.9^{20}$ .

## Binomiale

Consideriamo una v.a. binomiale  $\mathcal{B}(100, p)$ . Allora si ha che:

- A) il valore atteso è pari a  $100/p$ ;
- B) il valore atteso è pari a  $p/100$ ;
- C) il valore atteso è pari a  $100p$ ;
- D) il valore atteso è pari a  $100p(1 - p)$ .

## Geometrica

Si abbia un processo di Bernoulli di parametro  $1/4$ . Allora si ha che:

- A) la probabilità che il successo arrivi entro le prime 4 prove è  $(1/4)^4$ ;
- B) la probabilità che il primo successo arrivi alla quarta prova è  $1/4$ ;
- C) la probabilità che il successo non arrivi nelle prime 4 prove è  $3/4$ ;
- D) la probabilità che il successo non arrivi nelle prime 4 prove è  $(3/4)^4$ .

## Geometrica

Consideriamo una v.a. geometrica  $\mathcal{G}(p)$ . Allora si ha che:

- A) più grande è  $p$ , più grande è la varianza;
- B) la varianza è massima per  $p = 1/2$ ;
- C) più grande è  $p$ , più piccola è la varianza;
- D) la varianza è massima per  $p = 1/100$ .

## Indipendenza di discrete

Siano  $X$  e  $Y$  due v.a. discrete, per cui

$$P(X = 1, Y = 3) = P(X = 1)P(Y = 3),$$

dove 1 è uno dei valori possibili per  $X$  e 3 per  $Y$ . Allora  $X$  e  $Y$  sono indipendenti.

- A) sempre vero;
- B) sempre falso;
- C) vero se  $X$  e  $Y$  assumono solo 2 valori;
- D) vero se almeno una fra  $X$  e  $Y$  assume solo 1 valore.

## Definizioni

Dare le seguenti definizioni.

- 1 V.a. bernoulliana di parametro  $p$ .
- 2 Esperimento di Bernoulli.
- 3 Processo di Bernoulli.
- 4 V.a. binomiale di parametri  $n$  e  $p$ .
- 5 V.a. geometrica di parametro  $p$ .
- 6 Due v.a. discrete indipendenti.



## Esempi

Dare due esempi per tipo di casi in cui si utilizza una variabile:

- 1 di Bernoulli;
- 2 binomiale;
- 3 geometrica.

## Teoremi

- ① Scrivere quanto vale il valore atteso di
  - a. una  $\mathcal{B}(q)$ ;
  - b. una  $\mathcal{B}(m, q)$ ;
  - c. una  $\mathcal{G}(q)$ .
- ② Per le stesse v.a. di cui sopra, scrivere la varianza.
- ③ Date due v.a.  $X$  e  $Y$  indipendenti, quali proprietà, che coinvolgono valore atteso e varianza, sono vere?

## Esercizio

- 1 Si lancia un dado equilibrato. Qual è la probabilità che in 6 lanci esca 1 almeno una volta?
- 2 Qual è la probabilità che per vedere comparire il 6 occorra lanciare il dado più di 5 volte (cioè almeno 6 volte)? Qual è il numero di lanci che mediamente occorre fare per vedere comparire il 6?
- 3 Si lanci ora il dado 5 volte. Sapendo che il 6 non è comparso, qual è la probabilità che l'1 sia comparso almeno una volta?

## Esercizio

La probabilità che uno dei 1000 utenti di una pagina web faccia un reclamo in un giorno è 0.001 ed i comportamenti degli utenti (nello stesso giorno ed in giorni differenti) si suppongono indipendenti.

- a. Scegliere un modello per  $X$  = numero di reclami in un giorno. Qual è la probabilità che domani non vi siano reclami?
- b. Scegliere un modello per  $Y$  = numero di giorni senza reclami in un mese (30 giorni). Quanti giorni senza reclami vi aspettate in media in un mese?
- c. Calcolare la probabilità che in un mese vi siano esattamente 4 giorni senza reclami.

## Esercizio

Possiedo due dadi: il dado A è regolare, mentre il dado B è truccato in modo che la probabilità di ottenere 1 sia  $1/2$  e quella di ottenere 2, 3, 4, 5 o 6 sia  $1/10$ .

- a. Se getto ripetutamente il dado B, quanti lanci dovrò fare *mediamente* prima di ottenere la faccia numero 1?
- b. Se effettuo 15 lanci del dado B, quante volte *mediamente* osserverò la faccia numero 1?
- c. Ora a ogni lancio getto tutti e due i dadi. Qual è la legge della v.a. che conta il numero di lanci che occorre attendere *prima* di osservare per la prima volta un doppio 1?  
(Con “doppio 1” si intende naturalmente l'evento in cui entrambi i dadi lanciati mostrano la faccia 1.)

## Esercizio

In un esperimento si cerca di sintetizzare una proteina. Nel 10% degli esperimenti la sintesi non avviene e quindi l'esperimento fallisce.

- a. Qual è la variabile aleatoria che conta il numero di esperimenti falliti su 10 esperimenti? Qual è la probabilità che su 10 esperimenti esattamente 1 fallisca? Qual è la probabilità che almeno 1 fallisca?
- b. Qual è la variabile aleatoria che conta il numero di esperimenti da fare per riuscire a sintetizzare la proteina? Qual è la probabilità di dover fare 3 esperimenti per riuscirci?
- c. Sapendo che i primi 3 esperimenti sono falliti, qual è la probabilità che anche il quarto fallisca?