

Esercizi/domande su v.a. normali e indipendenza di continue

Daniela Bertacchi
Fabio Zucca

Probabilità per $\mathcal{N}(0, 1)$

Se $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, quanto vale $P(X \leq 3)$?

- A) circa 0;
- B) circa 3;
- C) circa 1;
- D) circa 0.5.

Probabilità per $\mathcal{N}(0, 1)$

Se $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, quanto vale $P(X \leq -3)$?

- A) circa 1;
- B) circa 0.5;
- C) circa 0;
- D) circa 3.

V.a. normali

Siano $X \sim \mathcal{N}(1, 1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(2, 2)$. Quale delle seguenti affermazioni vale sempre?

- A) se X e Y sono indipendenti allora $X - Y \sim \mathcal{N}(-1, -1)$;
- B) $X - Y \sim \mathcal{N}(-1, 3)$;
- C) se X e Y sono indipendenti allora $X - Y \sim \mathcal{N}(-1, 3)$;
- D) $X - Y \sim \mathcal{N}(-1, -1)$.

La funzione Φ

Quanto vale $\Phi(0)$ (Φ è la funzione di ripartizione della normale standard)?

A) $1/2$;

B) $1/\sqrt{2\pi}$;

C) 0 ;

D) 1 .

Quale variabile ha varianza 1?

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti e aventi entrambe varianza pari a σ^2 . Quale delle seguenti variabili ha varianza pari a 1?

A) $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$;

B) $\frac{X+Y}{2}$;

C) $\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}$;

D) $\frac{X+Y}{2\sigma}$.

La definizione di indipendenza

Siano $I = [0, 1]$ e $J = [2, 3]$ intervalli e X e Y variabili aleatorie tali che $P(X \in I) = 0.6$, $P(Y \in J) = 0.4$ e

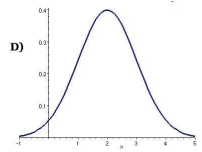
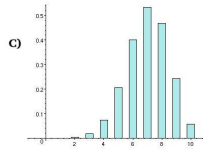
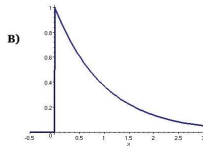
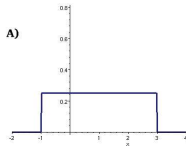
$$P(X \in I, Y \in J) = 0.24.$$

Allora è necessariamente vero che:

- A) $(X \in I)$ e $(Y \in J)$ sono eventi disgiunti;
- B) X e Y sono indipendenti;
- C) $P((X \in I) \cup (Y \in J)) = 0.76$;
- D) X e Y sono scorrelate.

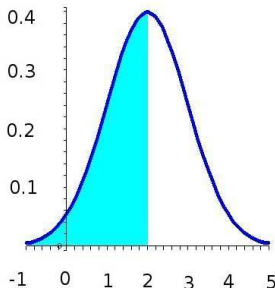
Riconoscere le densità

Nella seguente figura sono rappresentati i grafici di 4 densità di probabilità. Riconoscere le densità normale, binomiale e uniforme.



Aree e probabilità

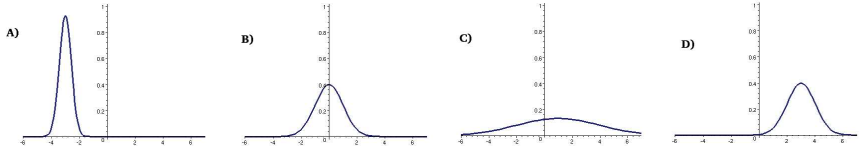
Nella seguente figura è rappresentato il grafico della densità di una variabile aleatoria normale. Quanto vale la misura dell'area colorata?



- A) $1/2$; B) $\Phi(2)$; C) 2; D) 0.4.

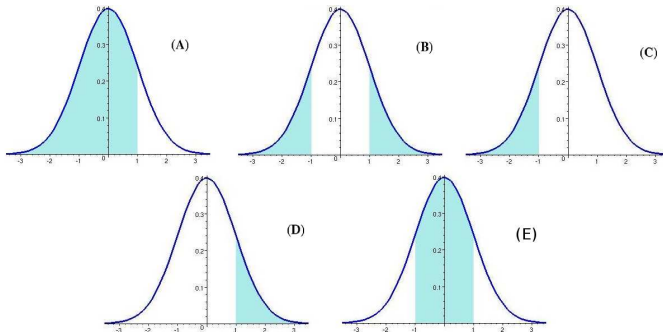
Normali generiche

Nella seguente figura sono rappresentati i grafici di 4 densità normali. Indicare quale ha media maggiore, quale ha media minore, quale ha varianza maggiore e quale ha varianza minore.



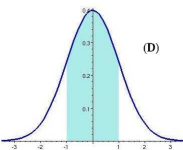
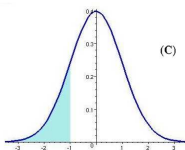
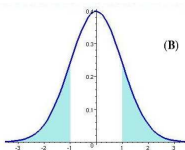
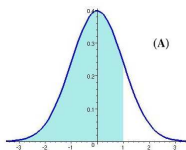
$\mathcal{N}(0, 1)$ e aree

Le cinque curve seguenti rappresentano la densità normale standard. Sia $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, riconoscere le aree che corrispondono a $P(X > 1)$, $P(X < 1)$, $P(|X| > 1)$, $P(|X| < 1)$ e $P(X < -1)$.



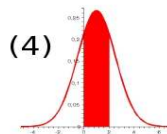
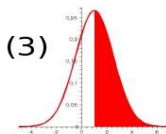
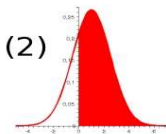
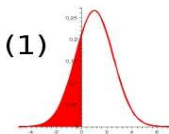
Aree e Φ

Nelle seguenti figure sono rappresentati i grafici della densità di una $\mathcal{N}(0, 1)$. Quale delle aree colorate misura $2(1 - \Phi(1))$? Quale $\Phi(1)$? Quale $1 - \Phi(1)$? Quale $2\Phi(1) - 1$?



Aree e normali

In figura sono riportate quattro densità normali. Quale delle aree colorate vale $1/2$?



Definizioni

Dare le seguenti definizioni.

- 1 V.a. normale di parametri 0 e 1 detta anche normale standard ($\mathcal{N}(0, 1)$).
- 2 V.a. normale di parametri -3 e 9 ($\mathcal{N}(-3, 9)$).
- 3 Funzione Φ (ovvero la funzione di ripartizione della normale standard).
- 4 Quantile $z_{0.76}$ della legge $\mathcal{N}(0, 1)$. Darne anche (oltre alla definizione) il valore numerico (usando le tavole).
- 5 Quando due v.a. X e Y (che siano continue) sono indipendenti.

Teoremi sulle normali e sull'indipendenza di v.a.

- 1 Elencare le proprietà della densità normale standard.
- 2 Elencare le proprietà della densità $\mathcal{N}(3, 16)$.
- 3 Quanto vale il valore atteso di $\mathcal{N}(3, 16)$? E la sua varianza?
- 4 Quando X e Y sono v.a. indipendenti, quanto vale $\mathbb{E}(X \cdot Y)$? E $\text{Var}(X + Y)$? E $\text{Var}(X - Y)$? E $\text{Cov}(X, Y)$?
- 5 Se X e Y sono due normali indipendenti, conosco la legge di $X + Y$? E di $X - Y$? Rispondere anche nel caso particolare $X \sim \mathcal{N}(1, 1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(5, 3)$.
- 6 Dire cosa cambia nel grafico di una densità normale se cambio il primo parametro e cosa cambia se invece cambio il secondo parametro.

Esercizio: calcolo di probabilità

Un montacarichi può portare un massimo di 603Kg. Vogliamo caricarci 50 scatole dal peso nominale di 12Kg l'una, peso che in realtà è modellizzabile con una $\mathcal{N}(12, 0.05)$.

Qual è la probabilità che il montacarichi non possa trasportare tutte le scatole contemporaneamente?

Esercizio: trovare σ

Una macchina produce sferette di diametro nominale 5mm. In realtà il diametro è una normale di media 5mm, e le sferette vengono scartate se hanno diametro che si discosta dalla media di più di 0.005mm (cioè se il diametro è minore di 4.995 oppure maggiore di 5.005).

Calcolare lo scarto quadratico medio sapendo che viene scartato il 3% della produzione.

Esercizio: un intervallo con probabilità data

Una ditta produce viti di lunghezza (media) di 2cm. In realtà la lunghezza di una vite scelta a caso è una variabile di media 2cm e varianza 0.01cm^2 . Viti troppo corte o troppo lunghe vengono scartate. Si vuole scartare solo il 2% della produzione.

- 1 Scegliere un modello probabilistico adeguato per la variabile *lunghezza di una vite*.
- 2 Quale deve essere l'intervallo di tolleranza?
[Suggerimento: si accetteranno viti di lunghezza fra $2 - x$ e $2 + x$ e vi si chiede di determinare x]