

Esercizio 1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Sia X la variabile aleatoria che indica la misurazione di pesi fatta con una bilancia digitale e si considerino i seguenti intervalli di valori di misurazione:

A : peso supera i 20 grammi $\implies \mathbb{P}(X \in A) = 0.5$

B : peso è in inferiore o uguale
a 15 grammi $\implies \mathbb{P}(X \in B) = 0.3$

C : peso è compreso tra 15 e 24 grammi
(estremi esclusi) $\implies \mathbb{P}(X \in C) = 0.6$

- A e B sono mutuamente disgiunti? B e C ? A e C ?
- Descrivere A^c e determinarne la probabilità.
- Descrivere C^c e determinarne la probabilità.
- Determinare $P(15 < X \leq 20)$.

Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

- a) $A \cap B = \emptyset$ allora sono disgiunti
 $B \cap C = \emptyset$ allora sono disgiunti
 $A \cap C \neq \emptyset$ allora NON sono mutuamente disgiunti
- b) A^c : peso è inferiore o uguale a 20 grammi
 $P(X \in A^c) = 1 - P(X \in A) = 0.5$
- c) C^c : peso è ≤ 15 grammi o ≥ 24 grammi
 $P(X \in C^c) = 1 - 0.6 = 0.4$
- d) $P(15 < X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 15) =$
 $P(X \in A^c) - P(X \in B) = 0.2$

Esercizio 2

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Siano A , B e C insiemi a due a due disgiunti con

$$\mathbb{P}(X \in A) = 0.2$$

$$\mathbb{P}(X \in B) = 0.3$$

$$\mathbb{P}(X \in C) = 0.5$$

Determinare:

a) $\mathbb{P}(X \in A^c)$

b) $\mathbb{P}(X \in B^c)$

c) $\mathbb{P}(X \in C^c)$

d) $\mathbb{P}(X \in A \cup B)$

e) $\mathbb{P}(X \in A \cup C)$

Soluzione es.2

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

a) $P(X \in A^c) = 1 - P(X \in A) = 0.8$

b) $P(X \in B^c) = 1 - P(X \in B) = 0.7$

c) $P(X \in C^c) = 1 - P(X \in C) = 0.5$

d) $P(X \in A \cup B) = P(X \in A) + P(X \in B) = 0.5$, siccome
 A e B sono disgiunti

e) $P(X \in A \cup C) = P(X \in A) + P(X \in C) = 0.7$, siccome
 A e C sono disgiunti

Esercizio 3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Sia X la durata (in ore) di un laser semiconduttore con le seguenti probabilità:

$$\mathbb{P}(X \leq 5000) = 0.05$$

$$\mathbb{P}(5000 < X \leq 7000) = 0.5$$

$$\mathbb{P}(X > 7000) = 0.45$$

- a) Determinare $\mathbb{P}(X \leq 7000)$
- b) Determinare $\mathbb{P}(X > 5000)$
- c) Supponiamo ora che ci siano tre laser indipendenti tutti soddisfacenti le ipotesi precedenti. Calcolare:
 - 1) la probabilità che tutti e tre i laser funzionino per più di 7000 ore;
 - 2) la probabilità che tutti e tre i laser funzionino per più di 5000 ore;
 - 3) nessuno dei tre laser funzioni per più di 7000 ore.

Soluzione es.3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

a) $\mathbb{P}(X \leq 7000) = 1 - \mathbb{P}(X > 7000) = 0.55$

b) $\mathbb{P}(X > 5000) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5000) = 0.95$

c)

1) $\mathbb{P}(X_1 > 7000; X_2 > 7000; X_3 > 7000) = (0.45)^3$,
siccome i tre laser sono indipendenti

2) $\mathbb{P}(X_1 > 5000; X_2 > 5000; X_3 > 5000) = (0.95)^3$,
siccome i tre laser sono indipendenti

3) $P(X_1 \leq 7000; X_2 \leq 7000; X_3 \leq 7000) = (0.55)^3$,
siccome i tre laser sono indipendenti

Esercizio 4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

In un gioco televisivo viene messo in palio un 1 milione di euro. Per vincerlo il concorrente dovrà indovinare fra tre buste qual è quella che contiene l'assegno. Il concorrente sceglie a caso una busta; a questo punto il conduttore mostra una delle due buste che sa essere vuota, offrendo al concorrente di cambiare la propria busta con quella rimanente.

- 1 Qual è la probabilità di vincere il premio conservando la prima busta scelta?
- 2 Qual è la probabilità di vincere cambiando la busta?
- 3 Qual è la probabilità di vincere se gioca a testa e croce fra le due strategie?

Soluzione es.4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Poichè la probabilità di scegliere la busta contenente la promessa di pagamento è $1/3$, se il concorrente decide di conservare la prima busta scelta, la probabilità di vincere è $1/3$.

Con la seconda strategia –consistente nel cambiare la busta che si ha in mano con la busta rimanente dopo che il conduttore ne ha mostrata una vuota– il concorrente vince se e solo se inizialmente ha scelto una delle due buste vuote. Pertanto, con la strategia del cambio della busta, la probabilità di vincere è pari a $2/3$.

Soluzione es.4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Poniamo $T = \{\text{Esce testa}\}$, $V = \{\text{Il concorrente vince}\}$ e supponiamo che, se esce testa, il concorrente scelga la prima strategia, ovvero non cambi la busta.

Se gioca a testa o croce fra le due strategie abbiamo, per la formula delle probabilità totali, che:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}(V|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(V|T^c)\mathbb{P}(T^c) \\ &= 1/3 \cdot 1/2 + 2/3 \cdot 1/2 = 1/2.\end{aligned}$$

Esercizio 5

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Una popolazione nordeuropea ha un'incidenza di AIDS pari allo 0.05%. Si utilizza un test che su una persona ammalata è positivo con una probabilità di 0.999, mentre su una persona sana risulta positivo con probabilità 0.002.

- 1 Qual è la probabilità che un individuo con test positivo sia effettivamente affetto da AIDS?
- 2 Qual è la probabilità che un individuo con test negativo non sia affetto da AIDS?
- 3 Qual è la probabilità che il test dica la verità?

Soluzione es.5

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Si considerino gli eventi

$T_+ :=$ “il test è positivo”,

$T_- :=$ “il test è negativo”,

$A :=$ “il paziente è ammalato”,

$S :=$ “il paziente è sano”.

1) Sia $\mathbb{P}(A) = x$, $\mathbb{P}(T_+|A) = p$ e $\mathbb{P}(T_-|S) = q$. Dalla formula di Bayes

$$\mathbb{P}(A|T_+) = \frac{\mathbb{P}(T_+|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T_+|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T_+|S)\mathbb{P}(S)} = \frac{px}{px + q(1-x)}$$

che è crescente in x se $p > q$.

Il risultato numerico con $x = 1/2000$, $p = 0.999$ e $q = 0.002$ è $4995/24985$.

2) Analogamente

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S|T_-) &= \frac{\mathbb{P}(T_-|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(T_-|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(T_-|A)\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{(1-q)(1-x)}{(1-q)(1-x) + (1-p)x}\end{aligned}$$

Il risultato numerico con $x = 1/2000$, $p = 0.999$ e $q = 0.002$ è $9975010/9975015$.

3) La probabilità cercata è

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((T_+ \cap A) \cup (T_- \cap S)) &= \mathbb{P}((T_+ \cap A)) + \mathbb{P}((T_- \cap S)) \\ &= \mathbb{P}((T_+ \cap A))\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}((T_- \cap S))\mathbb{P}(S)\end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

2) Analogamente

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S|T_-) &= \frac{\mathbb{P}(T_-|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(T_-|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(T_-|A)\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{(1-q)(1-x)}{(1-q)(1-x) + (1-p)x}\end{aligned}$$

Il risultato numerico con $x = 1/2000$, $p = 0.999$ e $q = 0.002$ è 9975010/9975015.

3) La probabilità cercata è

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((T_+ \cap A) \cup (T_- \cap S)) &= \mathbb{P}((T_+ \cap A)) + \mathbb{P}((T_- \cap S)) \\ &= \mathbb{P}((T_+ \cap A))\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}((T_- \cap S))\mathbb{P}(S) \\ &= px + (1-q)(1-x)\end{aligned}$$

Il risultato numerico è 19996001/2000000.