

Esercizio 1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Si consideri un campione X_1, \dots, X_n di v.a. discrete con distribuzione discreta:

$$p(-1) = \frac{\theta}{2}, \quad p(0) = 1 - \theta, \quad p(1) = \frac{\theta}{2}.$$

- 1 Determinare per quali θ la funzione p è una funzione di massa.
- 2 Calcolare media e varianza di X_1 .

Esercizio 1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Si consideri un campione X_1, \dots, X_n di v.a. discrete con distribuzione discreta:

$$p(-1) = \frac{\theta}{2}, \quad p(0) = 1 - \theta, \quad p(1) = \frac{\theta}{2}.$$

Si considerino i seguenti due stimatori di θ

$$\Theta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| \quad T_n = |X_n|$$

- (i) Si stabilisca se Θ_n e T_n sono distorti.
- (ii) Si calcoli l'errore quadratico medio (EQM) degli stimatori Θ_n e T_n e se ne studi il comportamento per $n \rightarrow +\infty$.
- (iii) Studiando l'efficienza relativa dei due stimatori, quale vi sembra migliore?

Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

- 1 Dobbiamo verificare che $p(k) \geq 0$ per ogni determinazione k e che $\sum_k p(k) = 1$. Condizioni verificate per ogni $0 \leq \theta \leq 1$.
- 2 $\mathbb{E}[X_1] = -1 \cdot p(-1) + 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) = 0$,
mentre $\text{var}(X_1) = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2] = \theta$
- (i) Siccome X_1, \dots, X_n sono indipendenti ed identicamente distribuiti (dal momento che, per ipotesi, sono un campione), $\mathbb{E}[\Theta_n] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|\right] = \mathbb{E}[|X_i|] = 1 \cdot p(-1) + 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) = \theta$
 $\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}[|X_n|] = \theta$
Quindi Θ_n e T_n sono due stimatori non distorti.

Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

(ii) L'errore quadratico medio è definito come

$$EQM(\Theta_n) = \mathbb{E} \left[(\Theta_n - \theta)^2 \right] =$$

$$\text{var}(\Theta_n) + (\text{distorsione})^2 = (*)$$

siccome Θ_n è non distorto e X_1, \dots, X_n sono indipendenti ed identicamente distribuiti

$$(*) = \text{var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i| \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(|X_i|) = \frac{1}{n} \text{var}(|X_i|) = \frac{1}{n} (\mathbb{E}[X_i^2] - \theta^2) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Analogamente: $EQM(T_n) = \theta(1 - \theta)$

(iii) Studiando l'efficienza relativa dei due stimatori, abbiamo che:

$$\frac{EQM(\Theta_n)}{EQM(T_n)} = \frac{1}{n} < 1 \text{ per } n > 1,$$

quindi Θ_n è migliore di T_n .

Esercizio 2

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Sia (X_1, X_2, X_3) un campione bernoulliano estratto da una popolazione X .

Al fine di stimare la media μ della popolazione è stato proposto il seguente stimatore:

$$T = \frac{1}{12}X_1 + 3(X_2 + X_3)$$

- 1 Mostrare che T è uno stimatore distorto e valutarne l'errore quadratico medio.
- 2 Si trovi la costante c tale che $W = cT$ sia uno stimatore non distorto per μ . Si valuti l'errore quadratico medio di W .
- 3 Quale dei due stimatori risulta migliore?

Osserviamo subito che lo stimatore della media μ , $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ è distorto se e solo se $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 1$ e

$$EQM \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i - \mu \right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \text{var}(X_1) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1 \right)^2.$$

- (1) Siccome $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{12}\mathbb{E}(X_1) + 3\mathbb{E}(X_2) + 3\mathbb{E}(X_3) = \frac{73}{12}\mathbb{E}(X_i) = \frac{73}{12}\mu \neq \mu$, quindi lo stimatore T è distorto.
- $$EQM(T) = \mathbb{E}[(T - \mu)^2] = \text{var}(T) + (\text{distorsione})^2 =$$
- $$\text{var}(T) + \left(\frac{61}{12}\right)^2 \mu^2 =$$
- $$= \left(18 + \frac{1}{144}\right) \mu(1 - \mu) + \left(\frac{61}{12}\right)^2 \mu^2$$

Soluzione es.2

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

(ii) siccome $\mathbb{E}(T) = \frac{73}{12}\mu$ allora $W = cT$ è non distorto se e solo se $c = \frac{12}{73}$.

$$EQM(W) = \text{var}(W) = \left(\frac{12}{73}\right)^2 \text{var}(T) = \left(\frac{12}{73}\right)^2 \left(18 + \frac{1}{144}\right) \mu(1 - \mu)$$

(iii) Siccome $\frac{EQM(W)}{EQM(T)} < 1$, allora W è migliore.

Esercizio 3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Il tempo di risposta di un calcolatore all'input di un terminale si descrive mediante una v.a. di legge esponenziale di parametro λ . Si intendono misurare n tempi di risposta T_1, \dots, T_n .

- 1 Mostrare che $\bar{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ è uno stimatore non distorto di $\frac{1}{\lambda}$.
- 2 Calcolare l'errore quadratico medio di \bar{T}_n e studiarne il comportamento asintotico.
- 3 Esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che (in base all'efficienza relativa) per ogni $1 \leq n \leq 6$ lo stimatore $W = cT_1 + (1 - c) T_2$ sia migliore di \bar{T}_n ?

Soluzione es.3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

- 1 $\mathbb{E} [\bar{T}_n] = \mathbb{E} [T_i] = \frac{1}{\lambda}$, siccome la media di un'esponenziale di parametro λ è $1/\lambda$. Quindi lo stimatore \bar{T}_n è uno stimatore non distorto di $\frac{1}{\lambda}$.
- 2 $EQM(\bar{T}_n) = \text{var}(\bar{T}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{var}(T_i) = \frac{1}{n} \text{var}(T_i) = \frac{1}{n\lambda^2} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.
- 3 Sia $W = cT_1 + (1 - c)T_2$ con c costante reale.

Soluzione es.3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Allora

$$\mathbb{E}[W] = c\mathbb{E}[T_1] + (1-c)\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} EQM(W) &= \mathbb{E}\left[\left(W - \frac{1}{\lambda}\right)^2\right] = \text{var}(W) \\ &= c^2 \text{var}(T_1) + (1-c)^2 \text{var}(T_2) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} (c^2 + 1 + c^2 - 2c) = \frac{2c^2 - 2c + 1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Lo stimatore W sarebbe migliore di \bar{T}_n in base all'efficienza relativa se e solo se $\frac{EQM(W)}{EQM(\bar{T}_n)} < 1$.

Soluzione es.3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Tuttavia

$$\frac{EQM(W)}{EQM(\bar{T}_n)} = n(2c^2 - 2c + 1) \leq 6(2c^2 - 2c + 1)$$

per ogni $1 \leq n \leq 6$ siccome $2c^2 - 2c + 1 > 0$.

Di conseguenza, se esistesse una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $1 \leq n \leq 6$ lo stimatore $W = cT_1 + (1 - c)T_2$ sia migliore di \bar{T}_n allora tale c dovrebbe soddisfare

$$\begin{aligned} 6(2c^2 - 2c + 1) &< 1 \\ 12c^2 - 12c + 5 &< 0 \text{ mai verificata,} \end{aligned}$$

quindi NON esiste nessuna costante c che soddisfa la richiesta del problema.

Esercizio 4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Il numero di elementi spuri in un litro di una soluzione prodotta in laboratorio è descritto da una variabile aleatoria X con media μ e varianza σ^2 . La produzione giornaliera sia di n confezioni da un litro l'una; il controllo viene effettuato prelevando m confezioni a caso tra quelle prodotte. Sia $\beta = n/m$ e si consideri l'approssimazione normale.

- 1 Si stimi la probabilità che la media del campione prelevato differisca dalla media vera di almeno $\alpha\sigma$.
- 2 Si stimi la probabilità che la media del campione prelevato differisca dalla media della produzione giornaliera di almeno $\alpha\sigma$.
- 3 Si mostri che la stima della media giornaliera data dalla media dei campioni prelevati migliora all'aumentare di n (β fissato). Cosa si può dire invece della stima fatta utilizzando il campione prelevato, del numero di elementi spuri totale prodotti in una giornata?

Soluzione es.6

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Sia $\{X_i\}_{i=1}^n$ la produzione giornaliera (sono variabili i.i.d.) e sia $\{X_i\}_{i=1}^m$ il campione prelevato; la variabile aleatoria che controlla la bontà della nostra stima è

$$Z := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \equiv (1-\beta) \left(\frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^n X_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \right)$$

In approssimazione normale

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^n X_i &\approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(n-m)) \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i &\approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/m) \end{aligned}$$

e sono indipendenti, per cui $Z \approx \mathcal{N}(0, (1/\beta - 1)\sigma^2/n)$.

Soluzione es.6

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

- 1 In approssimazione normale, standardizzando lo stimatore,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i - \mu \right| \geq \alpha \sigma \right) = 2 \left(1 - \Phi \left(\alpha \sqrt{m} \right) \right). \quad (1)$$

- 2 Come nel punto precedente

$$\mathbb{P} (|Z| \geq \alpha \sigma) = 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{\alpha \sqrt{n}}{\sqrt{1/\beta - 1}} \right) \right). \quad (2)$$

- 3 Dall'equazione (2) si ha che

$$2 \left(1 - \Phi \left(\frac{\alpha \sqrt{n}}{\sqrt{1/\beta - 1}} \right) \right) \downarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Soluzione es.6

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

La differenza tra la stima del numero totale di particelle spurie prodotte ed il numero effettivamente prodotto è rappresentato da $Z_1 = nZ$ pertanto

$$\mathbb{P}(|Z_1| \geq \alpha\sigma) = 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n(1/\beta - 1)}} \right) \right)$$

e quindi

$$2 \left(1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n(1/\beta - 1)}} \right) \right) \uparrow 1, \quad n \rightarrow +\infty.$$