

Cosa dobbiamo già conoscere?

Motivazioni

Esempi

Lo spazio campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi

L'implicazione logica

- Insiemistica (operazioni, diagrammi...).
- Insiemi finiti/numerabili/non numerabili.

Perché la “probabilità”?

- In molti esperimenti l'esito non è noto *a priori*
- tuttavia si sa dire quali sono gli **esiti possibili**
- e le loro **probabilità**.

DEFINIZIONE(non matematica).

Un esperimento aleatorio è un esperimento di cui a priori non si conosce l'esito.

NOTA: il termine “aleatorio” deriva dal latino *alea* che significa “dado”. È quindi sinonimo di “casuale”.

Fenomeni dove il modello è aleatorio

- Intrinsecamente aleatori: fisica quantistica.
- Deterministici ma con forte dipendenza dal dato iniziale (Sistemi Caotici): moneta.
- Deterministici ma con dipendenza da molte variabili non note: mercati finanziari.

I modelli probabilistici sono usati quando abbiamo a che fare con **incertezza** o **mancaanza di informazione**.

Esempi in biologia

Le misurazioni sono spesso da ritenersi esperimenti aleatori:

1. perché affette da errore;
2. perché la quantità misurata presenta differenze fra diversi individui;
3. perché non si conoscono tutte le variabili in gioco.

Come esempi basti considerare:

1. il diametro di una cellula fissata o la lunghezza di una certa proteina denaturata;
2. il peso delle trote di un certo allevamento;
3. l'efficacia o meno di un farmaco somministrato ad un individuo malato.

Esempi per fissare le idee

- a. Estrazioni del lotto: si pesca una pallina da un'urna che ne contiene 90, numerate da 1 a 90. Esperimento: vedere che numero esce.
- b. Gioco del poker. Esperimento: vedere quali sono le 5 carte che ho in mano dopo che il mazziere ha distribuito.
- c. Lanciare più volte una moneta. Esperimento: contare quanti lanci sono necessari per vedere comparire testa.
- d. Durata di una lampadina. Esperimento: accendere una lampadina e cronometrare il tempo necessario affinché si fulmini.

Esempi per fissare le idee

In tutti questi casi l'esito non è noto ma si sa quali sono i **casi possibili**:

- a. Estrazioni del lotto: tutti i numeri interi da 1 a 90.
- b. Gioco del poker: tutte le cinquine di carte che si possono estrarre dal mazzo da poker.
- c. Lanciare più volte una moneta: tutti i numeri interi maggiori o uguali a 1.
- d. Durata di una lampadina: tutti i numeri reali maggiori o uguali a 0.

Quando usare modelli probabilistici

In tutti i casi in cui c'è **incertezza**. La probabilità è un modello che usiamo in questi casi.

Lo spazio campionario

DEFINIZIONE.

- a. I possibili esiti di un esperimento aleatorio sono detti eventi elementari.
- b. L'insieme costituito da tutti gli eventi elementari è lo spazio campionario Ω .
- c. I sottoinsiemi di Ω sono gli eventi.
- d. Se Ω è finito o infinito numerabile allora è detto spazio campionario discreto, se è infinito non numerabile è detto spazio campionario continuo.

Nota: "numerabile" significa i cui elementi si possono "contare" (cioè dire "questo è il primo elemento, questo il secondo, etc."). Formalmente, sono numerabili gli insiemi che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali (dunque \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}).

Esempi: il lotto

Motivazioni

Esempi

Lo spazio
campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi
L'implicazione logica

- a. Gli eventi elementari sono tutti i numeri interi da 1 a 90.
- b. $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 89, 90\}$.
- c. Esempio di evento elementare: “viene estratto il 5” = $\{5\}$.
- d. Esempio di evento non elementare: “viene estratto un numero compreso fra 87 e 90” = $\{87, 88, 89, 90\}$.
- e. Ω è un insieme finito, quindi discreto.

Nota: cosa significa “finito”? Significa che possiamo scrivere un elenco di tutti gli elementi di Ω (magari ci metteremo un po'!).

Non confondete **finito** con **limitato**! Ad esempio l'intervallo $[2,3]$ è limitato ma infinito perché vi sono infiniti numeri ivi contenuti (non è neppure numerabile).

Esempi: il poker

- a. Gli eventi elementari sono tutte le cinquine di carte fatte con carte del mazzo da poker.

- b. Esempio di evento elementare:



- c. Esempio di evento non elementare: “ho in mano un tris” (tris di Re, di Regine,..., e poi le rimanenti due carte sono “libere”).
- d. Ω è un insieme finito, quindi discreto.
(Quanti elementi ha?)

Esempi: i lanci per vedere testa



Persi Diaconis, Stanford University

Esempi: i lanci per vedere testa

Motivazioni

Esempi

Lo spazio
campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi

L'implicazione logica

- a. Gli eventi elementari sono tutti i numeri interi maggiori o uguali a 1 più un simbolo ∞ .
- b. $\Omega = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ dove $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- c. Esempio di evento elementare: “servono esattamente 3 lanci per vedere testa” = CCT = $\{3\}$.
- d. Esempio di evento elementare: “esce sempre croce” = $\{\infty\}$.
- e. Esempio di evento non elementare: “ottengo testa con al massimo 3 lanci” = T, CT, CCT = $\{1, 2, 3\}$.
- f. Ω è un insieme numerabile, quindi discreto.

Esempi: la lampadina



Lampada ad arco, olio su tela 1909, di Giacomo Balla.
Posseduta dal Museum of Modern Art di New York.

Esempi: la lampadina

- a. Gli eventi elementari sono tutti i numeri reali maggiori o uguali a 0.
- b. $\Omega = [0, +\infty) = \mathbb{R}^+$.
- c. Esempio di evento elementare: “la lampadina dura esattamente 10 ore”= $\{10\}$.
- d. Esempio di evento non elementare: “la lampadina dura almeno 10 ore”= $(10, +\infty)$.
- e. Ω è un insieme non numerabile (è “più numeroso”, non si riesce a numerare tutti i numeri reali...), quindi è uno **spazio campionario continuo**.

Nota: gli esempi di spazi continui che incontreremo sono \mathbb{R} , \mathbb{R}^+ e in generale gli intervalli reali come $[2, 6.8]$, $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $(-\infty, 1)$ etc.

Gli eventi sono sottoinsiemi di Ω

Motivazioni

Esempi

Lo spazio
campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi

L'implicazione logica

Qualche pagina fa abbiamo visto che:

DEFINIZIONE.

I sottoinsiemi di Ω sono gli eventi.

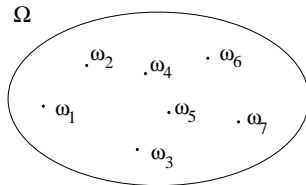
È a questo punto opportuno vedere che significato hanno le varie relazioni insiemistiche dal punto di vista del “linguaggio degli eventi”.

Se Ω è discreto tutti i suoi sottoinsiemi sono eventi.

In generale non è detto che **tutti** i sottoinsiemi di Ω siano **eventi**, ma di questo problema tecnico non ci occuperemo.

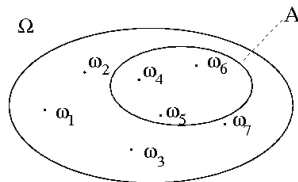
Eventi ed insiemi

Dobbiamo pensare che quando noi effettuiamo un esperimento aleatorio, c'è un grande “sacco” Ω da cui il “caso” pesca un singolo esito ω .



Quindi $\{\omega_1\}$ è l'evento “l'esito dell'esperimento è ω_1 ”.
Si dice anche che “si verifica l'esito ω_1 ”.

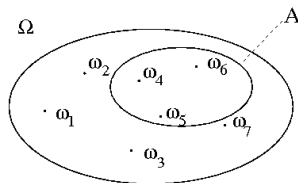
Se abbiamo un sottoinsieme A



- 1 A è l'evento "l'esito dell'esperimento sta in A , cioè è uno fra $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ "
- 2 A^c è l'evento "l'esito dell'esperimento non sta in A , cioè è uno fra $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_7$ "
- 3 Ω è l'**evento certo**: infatti sicuramente l'esito "estratto" sarà uno degli elementi di Ω .
- 4 \emptyset (insieme vuoto) è l'**evento impossibile**: non può verificarsi nessuno dei suoi elementi (semplicemente perché non ha elementi!).

Idea Fondamentale

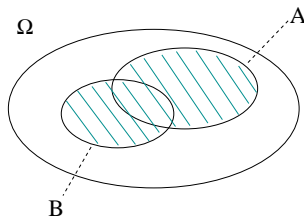
Se abbiamo un sottoinsieme A



in corrispondenza alla scelta del caso dell'elemento $\omega \in \Omega$
diremo che

$$A \text{ accade} \iff \omega \in A.$$

L'unione di due eventi



$A \cup B$ è l'evento "l'esito dell'esperimento è un elemento di A oppure di B (o di entrambi)"

L'intersezione di due eventi

Motivazioni

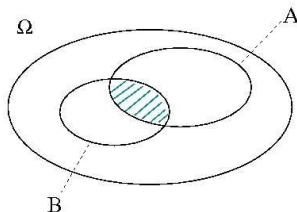
Esempi

Lo spazio campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi

L'implicazione logica



$A \cap B$ è l'evento "l'esito dell'esperimento è un elemento sia di A che di B"

La differenza di due eventi

Motivazioni

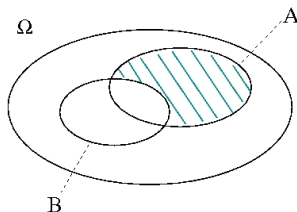
Esempi

Lo spazio campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi

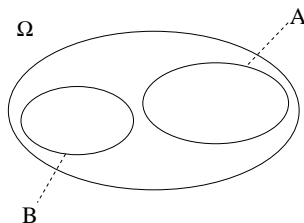
L'implicazione logica



$A \setminus B$ è l'evento "l'esito dell'esperimento è un elemento di A ma non di B "

Eventi incompatibili

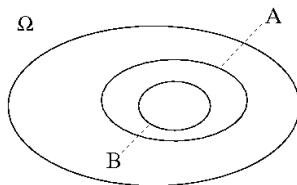
Se A e B sono **disgiunti**, cioè non hanno elementi in comune, ovvero $A \cap B = \emptyset$



allora A e B sono **eventi incompatibili**, infatti non si possono verificare contemporaneamente in quanto ciò significherebbe che l'esito dell'esperimento aleatorio è un elemento sia di A che di B .

Implicazione logica

Se A e B sono tali che $B \subset A$, cioè tutti gli elementi di B sono anche elementi di A



allora il verificarsi di B **implica** il verificarsi di A .
Infatti se l'esito dell'esperimento aleatorio è un elemento di B lo è anche di A .