

Cosa dobbiamo già conoscere?

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

- Come opera la matematica: dagli assiomi ai teoremi.
- Che cosa è una **funzione**, il suo **dominio** e il suo **codominio**.
- Che cosa significa $\bigcup_{j=1}^n A_j$ dove A_j sono insiemi ed $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
- Che cosa significa $\sum_{j=1}^n a_j$ dove a_j sono numeri.
- Saper “contare”, ovvero il calcolo combinatorio.
- (Più avanti) Che cosa è una successione e il suo limite.

Probabilità di eventi

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità
L'additività
Eventi a 2 a 2
disgiunti
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Vogliamo ora attribuire ad ogni evento la sua probabilità.

Nel linguaggio comune la probabilità si esprime con percentuali: ad esempio, nel lancio di una moneta, si suole dire che “si verifica testa con probabilità del 50%”.

Non esiste una definizione rigorosa di cosa sia la **probabilità di un evento** (come neppure di insieme...). Diamo perciò una definizione informale (vedremo più avanti una definizione matematica).

La **probabilità di un evento** è un numero reale compreso fra 0 e 1 che misura quanto riteniamo probabile il verificarsi di tale evento.

Esempi di probabilità di eventi

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità
L'additività
Eventi a 2 a 2
disgiunti
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

- 1 Se riteniamo più probabile che Lucia stasera esca con Mario piuttosto che con Paolo, porremo
 A = Lucia stasera esce con Mario
 B = Lucia stasera esce con Paolo
e $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ dovranno essere due numeri tali che $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$.
- 2 Se riteniamo che testa e croce abbiano la stessa probabilità, porremo
 A = esce testa
 B = esce croce
e $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.5$.

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità
L'additività
Eventi a 2 a 2
disgiunti
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Come definire/calcolare le probabilità?

Ci troviamo di fronte a due tipi di problemi:

- 1 come definire la probabilità dei singoli eventi, per lo meno di quelli più “semplici” (come gli eventi elementari)?
- 2 si può calcolare la probabilità di certi eventi conoscendo la probabilità di altri eventi?

Alla seconda domanda rispondiamo subito di sì con un esempio: se nel lancio della moneta la probabilità che esca testa è 0.3 (moneta truccata!) quanto vale la probabilità che esca croce?

Soluzione: 0.7 (perché?)

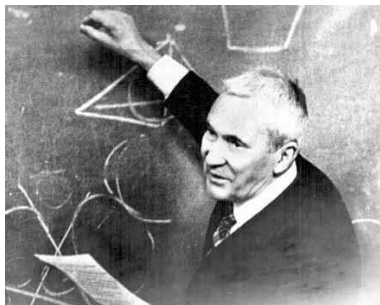
Definizione assiomatica di probabilità

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità
L'additività
Eventi a 2 a 2
disgiunti
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks



Attorno al 1930 **Andrey Nikolaevich Kolmogorov** (1903 - 1987) scoprì che le proprietà della probabilità si potevano ricavare da pochi assiomi e pose le basi per il Calcolo delle Probabilità moderno.

I primi studi sul Calcolo delle Probabilità risalgono al 1700, motivati dalla speranza di vincere nei giochi d'azzardo. A quegli studi ci si riferisce quando si parla di *approccio classico*.

Cosa sono gli assiomi? a cosa servono?

L'idea è di dare una definizione con pochi assiomi.

Gli **assiomi** in matematica sono (poche) proprietà che si definiscono vere. Da essi si fa discendere con deduzioni logiche tutta la teoria.

ESEMPIO.

Nella geometria euclidea gli assiomi sono i pochi postulati (come quello per cui per 2 punti passa un'unica retta). La teoria comprende proprietà dedotte da questi, come ad esempio il fatto che un triangolo con due lati uguali ha anche due angoli uguali.

DEFINIZIONE (ASSIOMATICA) DI PROBABILITÀ.

Sia Ω uno spazio campionario e \mathcal{F} una famiglia di suoi eventi.
Si chiama probabilità su Ω una qualsiasi funzione

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

con le proprietà

- (a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (b) se $\{A_n\}_n$ è una successione numerabile di eventi a due a due disgiunti allora

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_j).$$


Se Ω è discreto si considera \mathcal{F} costituita da **tutti** i sottoinsiemi di Ω , cioè $\mathcal{F} = \text{Parti}(\Omega)$.

In generale \mathcal{F} non è detto sia $\text{Parti}(\Omega)$ ma deve essere una famiglia con determinate proprietà (su cui non ci soffermiamo).

Gli assiomi nella definizione

Formalmente gli assiomi che poniamo veri per la probabilità \mathbb{P} sono:

- 1 \mathbb{P} è una funzione con **dominio** una famiglia di sottoinsiemi di Ω e **codominio** i numeri tra 0 e 1.

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1].$$


Non tutte le funzioni possono essere probabilità.

- se \mathbb{P} è tale che un qualche evento A ha $\mathbb{P}(A) < 0$ oppure $\mathbb{P}(A) > 1$ allora \mathbb{P} NON è una probabilità (viola il primo assioma!).
- CONSEGUENZA: se in un calcolo otteniamo che la probabilità di un certo evento è un numero < 0 oppure > 1 abbiamo sbagliato qualcosa!

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'addittività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Il secondo assioma

- ② l'evento certo deve avere probabilità pari ad 1:
 $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$

Non tutte le funzioni a valori in $[0,1]$ possono essere probabilità.

- ad esempio \mathbb{P} con $\mathbb{P}(\Omega) = 0.8$ e $\mathbb{P}(A) = 0.2$ per ogni $A \neq \Omega$ NON è una probabilità (viola il secondo assioma!).
- CONSEGUENZA: se in un calcolo otteniamo $\mathbb{P}(\Omega) < 1$ abbiamo sbagliato qualcosa!

L'assioma di additività

dal terzo assioma (detto della σ -additività) discende immediatamente che

- ③ \mathbb{P} deve soddisfare la richiesta di **additività**: se gli A_j sono a due a due disgiunti allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) \quad . \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) \quad . \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) \quad . \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$$

Nota: al primo membro l'evento unione degli A_j e la sua probabilità; al secondo membro le probabilità dei singoli A_j e la loro somma.

La vera definizione di Kolmogorov

Comprende in realtà la cosiddetta numerabile additività, cioè si chiede che la formula precedente valga anche con $n = \infty$ (e in tal caso la somma diventa una serie).

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

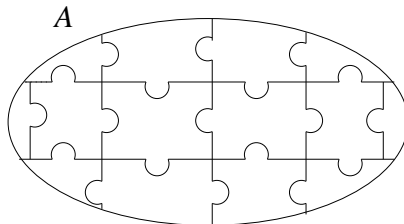
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

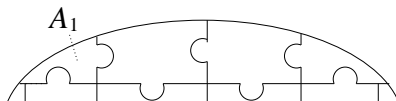
Cosa significa il terzo assioma?

Chiamiamo A l'evento $\bigcup_{j=1}^n A_j$.

A è diviso in pezzi come un *puzzle*:



A è diviso in pezzi come un *puzzle*: A_1



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

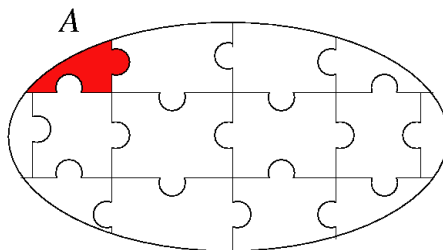
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

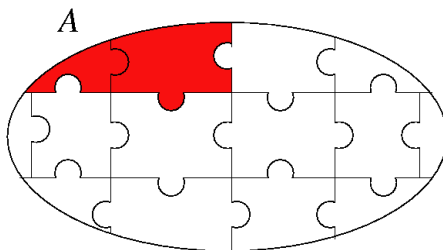
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

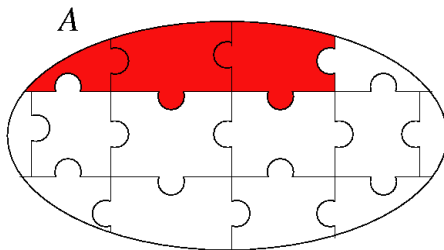
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

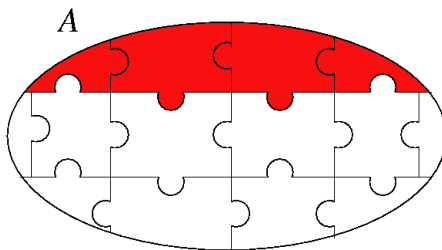
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

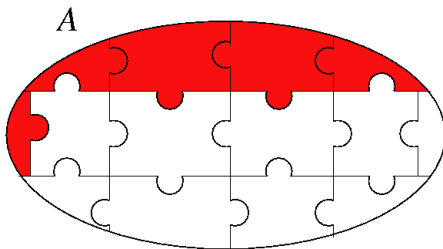
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_5) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

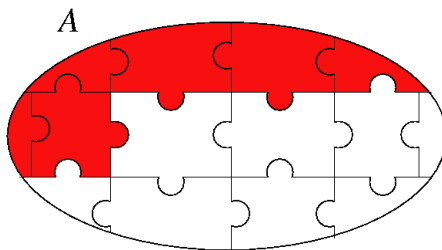
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_6) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

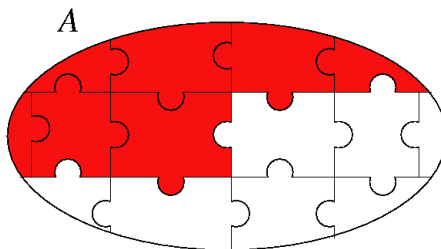
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_7) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

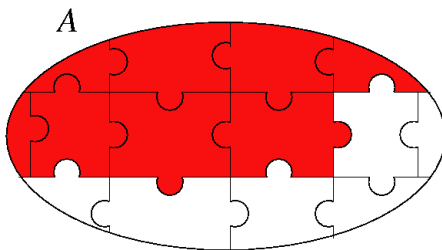
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_8) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

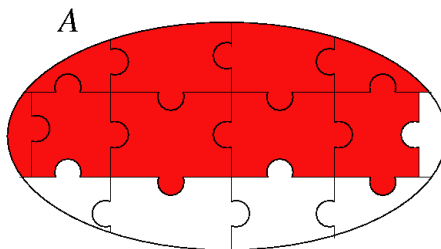
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_9) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

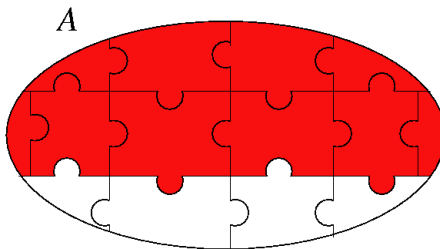
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{10}) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

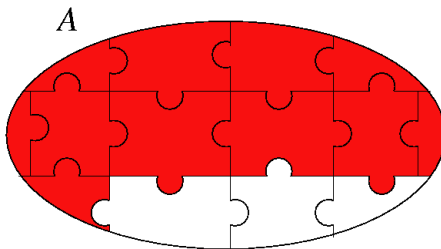
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{11}) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

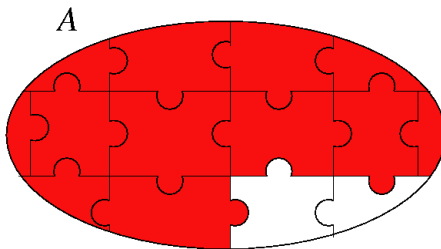
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{12}) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

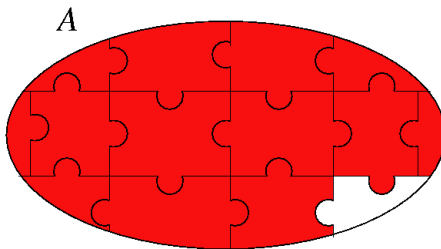
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{13}) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

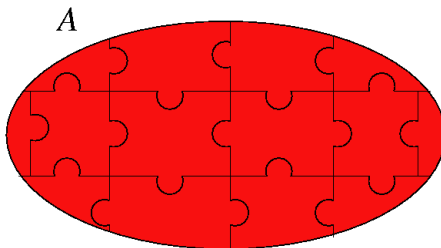
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

e infine $\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$ (qui $n = 14$)



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Un esempio

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'addittività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Paolo non ha ancora deciso cosa farà domani sera. Potrebbe stare in casa oppure uscire, nel qual caso o andrebbe in palestra o al cinema. Sappiamo che la probabilità che vada in palestra è 0.3 e quella che vada al cinema 0.2 (e supponiamo che la palestra e il cinema si escludano a vicenda). Qual è la probabilità che esca?

Chiamiamo

A l'evento "Paolo domani sera esce",

A_1 = "Paolo domani sera va in palestra",

A_2 = "Paolo domani sera va al cinema"

Allora $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

e $\mathbb{P}(A_1) = 0.3$, $\mathbb{P}(A_2) = 0.2$.

Quanto vale $\mathbb{P}(A)$? **Soluzione: 0.5.**

Eventi a 2 a 2 disgiunti

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Per ricavare la probabilità di uscire come $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$ è fondamentale che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, altrimenti conteremmo l'intersezione due volte.

Esattamente come nei *puzzle* i pezzi non si sovrappongono!

3 eventi non disgiunti a 2 a 2

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

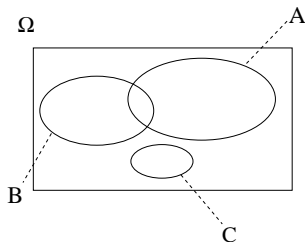
L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Ma se A , B e C sono



allora **non è vero che** $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$
(notate che c'è una parte che contate due volte...).

Eppure $A \cap B \cap C = \emptyset!!!$

Successioni di eventi disgiunti a 2 a 2

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità
L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Evidentemente $A \cap B \cap C = \emptyset$ non basta, occorre la proprietà più forte che gli eventi siano **a due a due disgiunti** (=nessuna parte in comune),
cioè che $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$.

Idem se gli eventi sono 4, 5, eccetera. Cominciano a essere molte condizioni da scrivere! Ne scriviamo una sola che racchiude tutti i casi possibili.

DEFINIZIONE.

Una famiglia di eventi $\{A_1, \dots, A_n\}$ è una famiglia di eventi a due a due disgiunti se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.

La definizione è la stessa anche nel caso di famiglie di eventi $\{A_i\}_i$ infinite.

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Proprietà della probabilità

Con il solo utilizzo degli assiomi si dimostrano le seguenti proprietà.

TEOREMA.

Data una probabilità \mathbb{P} valgono le seguenti proprietà:

- 1 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- 2 $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- 3 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Dimostrazione.

- 1 Uso la additività con $A_1 = \emptyset$ e $A_2 = \emptyset$. Notate che $\emptyset = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (quindi sono disgiunti). Allora

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2),$$

da cui

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset),$$

sottraggo membro a membro $\mathbb{P}(\emptyset)$ e ottengo

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset).$$

- 2 Poiché

$$A \cup A^c = \Omega$$

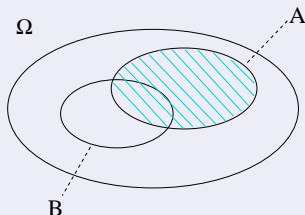
usando la additività si ha

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$$

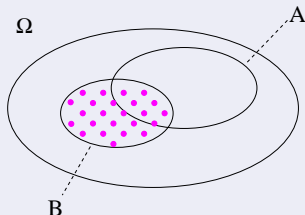
(ricordiamoci che $\mathbb{P}(\Omega) = 1$). Portiamo $\mathbb{P}(A)$ al secondo membro e il gioco è fatto.

D. Bertacchi
F. Zucca

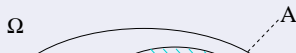
3 Disegniamo i due eventi A e B in posizione generica:



$A \cup B$ è composto da: A



$A \cup B$ è composto da: A e B



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità
L'additività
Eventi a 2 a 2
disgiunti
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

La nostra “cassetta degli attrezzi”

Ecco le formule che abbiamo concernenti il calcolo di probabilità:

- 1 $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- 2 $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- 3 se A e B sono disgiunti: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- 4 se A e B **non** sono disgiunti:
 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- 5 con più di due insiemi, ma a due a due disgiunti: la finita e la numerabile additività