

## Esercizio 1

Sia  $X$  una variabile aleatoria Normale  $\mathcal{N}(5, 3)$ . Facendo uso delle tavole:

- 1 si calcoli  $\mathbb{P}(|X - 5| < 1)$ ;
- 2 si stabilisca il valore  $\alpha$  tale che  $\mathbb{P}(X < \alpha) = 0.7$
- 3 si calcoli  $\text{Var}(2X - 3)$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

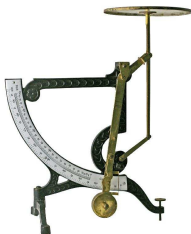
Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

- 1  $\mathbb{P}(|X - 5| < 1) = \mathbb{P}(-1 < X - 5 < 1) = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1 = 0.438$  dove  $\phi$  rappresenta la funzione di distribuzione cumulata della normale standard.
- 2  $\mathbb{P}(X < \alpha) = \phi\left(\frac{\alpha-5}{\sqrt{3}}\right) = 0.7$ . Dalle tavole si deduce che  $\frac{\alpha-5}{\sqrt{3}} = 0.5244$  e quindi  $\alpha = 5.9$
- 3  $Var(2X - 3) = 4 \cdot Var(X) = 12$

## Esercizio 2



Una bilancia difettosa ha un errore sistematico di 0.1g ed un errore casuale che si suppone avere distribuzione Normale  $\mathcal{N}(0, 4/25)$  (si osservi quindi che si possono avere anche risultati negativi!). Si sottopone alla misura un campione di 0.9g. Calcolare:

- 1 la probabilità che la misura dia un risultato compreso tra 0.8g e 1g;
- 2 la probabilità la misura dia un risultato superiore a 1g;
- 3 la probabilità che la misura dia un risultato minore, in valore assoluto, di 0.9g.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Soluzione es.2

Indichiamo con  $X$  l'errore casuale e con  $M$  la misura del nostro campione. Quindi  $X \sim \mathcal{N}(0, 4/25)$ ,  $5X/2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  e  $M = X + 0.1 + 0.9 = X + 1$ .

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \mathbb{P}(0.8 \leq M \leq 1) &= \mathbb{P}(-0.2 \leq X \leq 0) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}X \leq 0\right) = \Phi(0) - \Phi(-0.5) = \\ &\quad \Phi(0.5) - 0.5 = 0.1915 \text{ (si ricordi che} \\ &\quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad M \leq 1 \text{ se e solo se } X \leq 0 \text{ quindi} \\ \mathbb{P}(M \leq 1) = \mathbb{P}(X \leq 0) = 1/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad |X + 1| \leq 9/10 \text{ se e solo se } X \in [-19/10; -1/10], \\ \text{pertanto } \mathbb{P}(X \in [-19/10; -1/10]) = \\ \mathbb{P}(5X/2 \in [-19/4; -1/4]) = \Phi(19/4) - \Phi(1/4) = \\ 1 - 0.5987 = 0.4013. \end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Esercizio 3



La durata in ore della lampadina “gran fulminata” (prodotta dalla ditta “bulbo incandescente”) segue una legge normale di media 2000 e varianza  $\sigma^2$ .

Se un compratore richiede che almeno il 90% di esse abbia una durata superiore alle 1500 ore, qual è il valore massimo che  $\sigma$  può assumere per soddisfare l'esigenza dell'acquirente?

Esercizio 1

Esercizio 2

**Esercizio 3**

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Soluzione es.3

Sia  $X$  la durata di una lampadina. L'acquirente richiede che  $0.9 \leq \mathbb{P}(X \geq 1500) = 1 - \phi(-500/\sigma)$ . Pertanto si richiede che  $\phi(500/\sigma) \geq 0.9$  ovvero  $500/\sigma \geq q_{0.9} \approx 1.2816$ . Quindi  $\sigma \leq 500/1.2816 = 390.137$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Esercizio 4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

**Esercizio 4**

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11



Un operatore, in attesa dell'apertura del mercato azionario, decide di comperare un pacchetto di azioni se la differenza tra il prezzo di apertura e quello di chiusura della sera precedente è compreso tra  $a$  e  $b$  ( $a < b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ). Supponendo che la variazione di prezzo segua una legge normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , qual è il valore di  $\sigma$  in corrispondenza del quale si ha la massima probabilità di comperare?

## Soluzione es.4

Sia  $X$  la differenza di quotazione,  $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = f(\sigma)$ ,  
dove, dopo un cambio di variabile

$$f(\sigma) = \int_{a/\sigma}^{b/\sigma} \frac{\exp(-s^2/2)}{\sqrt{2\pi}} ds.$$

Calcolando la derivata  $f'$  e studiando la funzione in  $(0, +\infty)$   
si trova immediatamente che

a) se  $a \leq 0 \leq b$  ( $a < b$ ) allora  $f$  è decrescente, pertanto  
minore è  $\sigma$  maggiore è la probabilità che  $X \in [a, b]$  (ed il  
limite per  $\sigma$  che tende a  $0^+$  di tale valore è 1);

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11



## Soluzione es.4

b) se  $0 < a < b$  allora si trova che  $f$  è decrescente in  $\left(\sqrt{(b^2 - a^2) / (2 \ln(b/a))}; +\infty\right)$  e crescente in  $\left(0; \sqrt{(b^2 - a^2) / (2 \ln(b/a))}\right)$ , pertanto il massimo è assunto in  $\sigma^2 = (b^2 - a^2) / (2 \ln(b/a))$ .

c) se  $a < b < 0$ , utilizzando la parità ed il punto precedente si ha che il massimo è assunto in  $\sigma^2 = (a^2 - b^2) / (2 \ln(a/b))$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Esercizio 5



L'altezza di una data popolazione maschile di età compresa tra i 18 ed i 25 anni segue una distribuzione normale.

- 1 Se l'altezza media fosse 165cm ed esattamente il 5.48% della popolazione fosse più basso di 158cm, quale percentuale della popolazione avrebbe un'altezza superiore a 174cm?
- 2 Se il primo quartile dell'altezza fosse 160cm ed il 90° percentile fosse 184cm, quanto varrebbero la media e la deviazione standard?

## Soluzione es.5

Ricordiamo che  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  implica  $(X - \mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$  e che, se  $U_X$  è la funzione dei quantili di  $X$  allora  $U_X = \mu + \sigma q$  (dove  $q$  è la funzione dei quantili della distribuzione  $\mathcal{N}(0, 1)$ ). Si ricordi inoltre che  $q(\alpha) = -q(1 - \alpha)$ .

- 1) Sappiamo che  $\mu = 165$  e che
- $$0.0548 = \mathbb{P}(X \leq 158) = \mathbb{P}((X - \mu)/\sigma \leq (158 - \mu)/\sigma) = \phi((158 - \mu)/\sigma) = \phi(-7/\sigma), \text{ pertanto}$$
- $$\sigma = -7/q(0.0548) = 7/q(0.9452) \approx 7/1.6 = 4.375. \text{ Da}$$
- $$\text{cui } \mathbb{P}(X > 174) = 1 - \phi((174 - \mu)/\sigma) = 1 - \phi(2.0571) = 1 - 0.9802 = 0.0198.$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Soluzione es.5

Ricordiamo che  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  implica  $(X - \mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$  e che, se  $U_X$  è la funzione dei quantili di  $X$  allora  $U_X = \mu + \sigma q$  (dove  $q$  è la funzione dei quantili della distribuzione  $\mathcal{N}(0, 1)$ ). Si ricordi inoltre che  $q(\alpha) = -q(1 - \alpha)$ .

- 2) Se  $160 = U_X(1/4) = \mu + \sigma q(1/4)$ ,  
 $184 = U_X(9/10) = \mu + \sigma q(9/10)$  allora  
 $\sigma = (184 - 160)/(q(9/10) - q(1/4)) \approx$   
 $24/(1.2816 - 0.6745) = 12.2693$ , mentre  
 $\mu = (160q(9/10) - 184q(1/4))/(q(9/10) - q(1/4)) \approx$   
 $329.1544/1.956 = 168.2758$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Esercizio 6



Il tempo necessario ad Adalberto per coprire il percorso casa-ufficio è una variabile aleatoria di legge normale. Se il tempo medio è di 30 minuti e la probabilità di coprire il percorso in più di 40 minuti è 0.1, quanto vale la probabilità di coprire il percorso in più di 50 minuti?

## Soluzione es.6

Dai dati si ha  $\mu = 30$  e  $1/10 = \mathbb{P}(X > 40) = \mathbb{P}((X - \mu)/\sigma > (40 - \mu)/\sigma) = 1 - \phi((40 - 30)/\sigma)$  pertanto  
 $\sigma = 10/q(9/10) \approx 10/1.2816 = 7.8027$ .

Da cui  $\mathbb{P}(X > 50) = \mathbb{P}((X - \mu)/\sigma > (50 - \mu)/\sigma) \approx$   
 $1 - \phi(20/7.8027) = 1 - \phi(2.5632) = 1 - 0.9948 = 0.0052$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Esercizio 7

Due venditori indipendenti, le ditte “Argilla Imbevuta” e “Sbricioloni”, forniscono il famoso cemento “Rapid-Trap” ad un appaltatore di autostrade. Grazie all’esperienza precedente, si sa che la resistenza alla compressione di provini in cemento può essere modellato da una distribuzione normale con media  $\mu_1 = 6000 \text{ Kg/cm}^2$  e deviazione standard  $\sigma_1 = 100 \text{ Kg/cm}^2$  per quello della “Argilla Impastata” e  $\mu_2 = 5825 \text{ Kg/cm}^2$  e deviazione standard  $\sigma_2 = 90 \text{ Kg/cm}^2$  per quello della “Sbricioloni”.

- 1 Qual è la probabilità che entrambi i venditori forniscano una partita di cemento con resistenza compresa tra 5800 e 6050  $\text{Kg/cm}^2$  ?
- 2 Quanto vale la probabilità che le resistenze del cemento di entrambi i venditori siano inferiori a 6100?

## Soluzione es.7

Indichiamo con  $X_1$  e con  $X_2$  la resistenza del cemento prodotto dal venditore 1 e dal 2, rispettivamente.

- 1 Siccome  $X_1$  e  $X_2$  sono indipendenti, allora
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(5800 \leq X_1 \leq 6050; 5800 \leq X_2 \leq 6050) \\ &= \mathbb{P}(5800 \leq X_1 \leq 6050) \mathbb{P}(5800 \leq X_2 \leq 6050) \\ &= [\phi(0.5) - \phi(-2)] [\phi(\frac{225}{90}) - \phi(-\frac{25}{90})] \\ &= [\phi(0.5) - 1 + \phi(2)] [\phi(\frac{225}{90}) - 1 + \phi(\frac{25}{90})] \\ &= (0.6915 - 1 + 0.9772) (0.9938 - 1 + 0.6103) = 0.40 \end{aligned}$$
- 2 Siccome  $X_1$  e  $X_2$  sono indipendenti, allora
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_1 < 6100; X_2 < 6100) = \\ & \mathbb{P}(X_1 < 6100) \mathbb{P}(X_2 < 6100) = \dots = 0.84. \end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11



## Esercizio 8

La fabbrica “Rust Into Rust” che fornisce le FS costruisce rotaie la cui lunghezza segue una legge normale  $\mathcal{N}(9.99, 1/10000)$  (dove la media è in metri e la varianza in metri<sup>2</sup>). Determinare:

- 1 la probabilità che una rotaia sia più lunga di 10m;
- 2 la probabilità che 101 rotaie siano più lunghe di 1Km;
- 3 la probabilità che esattamente 101 rotaie siano necessarie per coprire 1Km;
- 4 la lunghezza  $x$  affinché la percentuale di rotaie con lunghezza non superiore a  $x$  sia il 10%;
- 5 come si deve modificare la lunghezza media affinché la percentuale di rotaie con lunghezza superiore a 10m sia il 40%?

## Soluzione es.8

Sia  $X$  la misura di una rotaia.

$$(1) \mathbb{P}(X > 10) = 1 - \phi((10 - 9.99)/0.01) = 1 - \phi(1) = 1 - 0.8143 = 0.1857$$

$$(2) \text{ Se } \{X_i\}_{i=1, \dots, 101} \text{ sono le misure (indipendenti ed} \\ \text{identicamente distribuite) delle 101 rotaie, allora} \\ \sum_{i=1}^{101} X_i \sim \mathcal{N}(101 \cdot 9.99, 101 \cdot (1/10000)), \text{ pertanto} \\ \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{101} X_i > 1000\right) = \\ 1 - \phi\left((1000 - 9.99 \cdot 101) / \sqrt{0.0101}\right) = \\ = 1 - \phi\left(-89.9 / \sqrt{1.01}\right) \cong 1$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Soluzione es.8

- (3) sebbene un calcolo esatto di questo tipo coinvolgerebbe una convoluzione, in questo specifico caso possiamo stimare la probabilità in questo modo: sia A "le prime 100 rotaie non bastano a coprire 1Km" e B "le 101 rotaie bastano a coprire 1Km". Quello che dobbiamo calcolare è  $\mathbb{P}(A \cap B)$  cioè

$$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B^c) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^c).$$

Siccome  $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}(100 \cdot 9.99, 100 \cdot (1/10000))$ ,  
pertanto

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 1000\right) = 1 - \phi(1/0.1) = 1 - \phi(10) \cong 0.$$

$$\text{Quindi } \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B^c) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^c) \cong 1.$$

(Si osservi che, essendo variabili normali, le lunghezze non sono necessariamente positive e quindi  $B^c$  non è contenuto in A, anche se nel nostro caso la probabilità dell'evento  $B^c \cap A^c$  è prossima a 0).

## Soluzione es.8

(4)  $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.1$  ovvero  $\phi((x - 9.99) / (1/100)) = 0.1$ .  
Quindi  $x = 9.9887$ .

(4)  $1 - \phi\left(\frac{10 - \mu}{0.01}\right) = 0.4$  quindi  $\phi(1000 - 100\mu) = 0.6$ . Da  
cui  $1000 - 100\mu = 0.2533$  ovvero  
 $\mu = 10 - 0.002533 = 9.997467$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Esercizio 9

Un'apparecchiatura elettronica  $A$  è composta da tre microchips  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ . Le affidabilità di ciascun microchip, ovvero le probabilità che ciascun microchip funzioni correttamente, sono  $a_1 = 0.95$ ,  $a_2 = 0.99$ ,  $a_3 = 0.7$ . I microchips  $M_2$  e  $M_3$  sono collegati in parallelo a formare un unico componente  $C_2$  (quindi  $C_2$  funziona quando funziona almeno uno dei due microchips), il quale è collegato in serie con  $M_1$  (quindi  $A$  funziona quando funzionano tutti e due i suoi componenti  $M_1$  e  $C_2$ ). Qual è l'affidabilità dell'intera apparecchiatura  $A$ ?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

$$\begin{aligned} a^{C_2} &= \mathbb{P}(C_2 \text{ funzioni}) = 1 - \mathbb{P}(C_2 \text{ non funzioni}) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(M_2 \text{ e } M_3 \text{ non funzionano}) = \\ &= 1 - (1 - 0.99)(1 - 0.7) = 0.997 \end{aligned}$$

$$a_{totale} = a^{C_2} \cdot a_1 = 0.997 \cdot 0.95 = 0.9497$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

**Esercizio 9**

Esercizio 10

Esercizio 11

## Esercizio 10

Un'apparecchiatura è composta da 2 sottoinsiemi di tipo  $M$  che operano in parallelo. Ogni sottosistema  $M$  è costituito da 2 componenti che operano in serie ed ogni componente ha affidabilità pari a 0.9.

- 1 Si determini l'affidabilità dell'apparecchiatura.
- 2 Di quanti sottosistemi di tipo  $M$  collegati in parallelo dovrebbe essere composta l'apparecchiatura affinché la sua affidabilità sia almeno 0.99?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

## Soluzione es.10

- 1 Chiamiamo  $M_1$  e  $M_2$  i due sottoinsiemi di tipo M in parallelo che formano l'apparecchiatura. Allora:

$$a^{M_1} = a^{M_2} = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81$$

quindi l'affidabilità totale dell'apparecchiatura:

$$a_{totale} = 1 - (1 - 0.81) \cdot (1 - 0.81) = 0.9639$$

- 2 Chiamiamo  $n$  il numero di sottoinsiemi M collegati in parallelo e S il nuovo sistema.  
Quindi l'affidabilità di S è data da:

$$a_S = 1 - (1 - a_M)^n = 1 - (0.19)^n$$

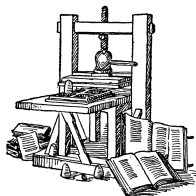
Dobbiamo allora determinare  $n$  tale che

$1 - (0.19)^n \geq 0.99$ . Si trova che

$n \geq \log(0.01) / \log(0.19) \approx 2.773$  pertanto  $n \geq 3$ .



## Esercizio 11



La ditta “F.lli Amanuensi” che stampa e rilega libri possiede 3 macchine per la stampa delle pagine, ognuna di affidabilità 0.7, ed una macchina per la rilegatura di affidabilità 0.8.

- 1 Calcolare l'affidabilità del sistema.
- 2 Alla ditta viene proposto l'acquisto di una certa macchina di affidabilità  $p$  che stampa e rilega. Quanto deve valere  $p$  perché, con l'acquisto di tale macchina, l'affidabilità totale del sistema sia almeno 0.95?

## Soluzione es.11

1  $a_{\text{stampa}} = 1 - (0.3)^3 = 0.973$   
 $a_{\text{totale}} = a_{\text{stampa}} \cdot a_{\text{rilegatura}} = 0.973 \cdot 0.8 = 0.7784$

2  $p$  deve soddisfare

$$1 - (1 - 0.7784)(1 - p) \geq 0.95$$

$$(1 - 0.7784)(1 - p) \leq 0.05$$

$$1 - p \leq 0.2256$$

quindi  $p \geq 0.7744$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11