

Esercizio 1



Una ditta di trasporti internazionali possiede 100 tir dello stesso tipo. Ogni tir percorre una media di 600 km al giorno con una deviazione standard di 50 km.

- 1 Supponendo che i giorni lavorativi in un anno siano 340, quanti chilometri percorre mediamente un tir in un anno?
- 2 Una merce deve essere trasportata da un tir ad una distanza di 7000 km. Viene chiesto al titolare dopo quanti giorni dalla partenza avverrà la consegna. Rispondere affinché con probabilità almeno pari a 0.9 la merce arrivi a destinazione entro il tempo dichiarato?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

(1) Sia X_i la v.a. che descrive lo spazio percorso nel giorno i . Sappiamo che $\mathbb{E}(X_i) = 600$ km. e $\text{var}(X_i) = 50^2 \text{km}^2$. Allora lo spazio percorso in 340 giorni è rappresentato dalla v.a. $S = \sum_{i=1}^{340} X_i$. La media di questa variabile è $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{340} \mathbb{E}(X_i) = 340 \cdot 600 = 204.000$ km.

Soluzione es.1

(2) Bisogna calcolare quanto deve valere n affinché risulti

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 7000\right) \geq 0.9.$$

Dal TCL sappiamo che $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$, dunque

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 7000\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \geq \frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}}\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(Z \geq \frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}}\right) \geq 0.9.$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

da cui deve essere

$$\phi\left(\frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}}\right) \leq 1 - 0.9 = 0.1$$

e quindi

$$\frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}} \leq q_{0.1} = -1.28.$$

Si ottiene così la disequazione $64\sqrt{n} - n600 + 7000 \leq 0$.

Ponendo $x = \sqrt{n}$ si ottiene una disequazione di II grado le cui soluzioni sono 3.47 e -3.36 .

Poichè siamo interessati solo alla radice positiva, otteniamo $x \geq 3.47$ ossia $n \geq 12.04$. Dunque il titolare deve dichiarare 13 giorni di attesa.

Esercizio 2

Il tempo di lavorazione di un pezzo meccanico è una variabile aleatoria di media $\mu = 2$ minuti e deviazione standard $\sigma = 0,3$ minuti.

- 1 In approssimazione normale, calcolare la probabilità di effettuare la lavorazione di 150 pezzi in un tempo minore di 5 ore e 10 minuti.
- 2 In approssimazione normale, calcolare la probabilità che la media campionaria dei tempi di lavorazione relativa a 100 pezzi sia compresa tra 1 minuto e 55 secondi e 2 minuti e 10 secondi.
- 3 Quanti pezzi dobbiamo misurare per essere certi al 95% che la media dei loro tempi di lavorazione non differisca da 2 minuti per più di 4 secondi?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Soluzione es.2

Sia T_i la v.a. che misura il tempo di lavorazione dell' i -esimo pezzo. Per ipotesi le T_i sono i.i.d., con $\mathbb{E}[T_i] = 2'$, e $\text{var}[T_i] = (0,3')^2$.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} [T_1 + \dots + T_{150} < 310'] \\ &= \mathbb{P} \left[\frac{T_1 + \dots + T_{150} - 300'}{0,3'\sqrt{150}} < \frac{10'}{0,3'\sqrt{150}} \right] \\ &\simeq \Phi(2,722) \simeq 0,99676. \end{aligned}$$

Soluzione es.2

- (2) Ricordando che $1'55'' = 115''$, $2'10'' = 130''$ e $0,3' = 18''$ si ha:

$$\mathbb{P}(115'' < \bar{T}_{100} < 130'')$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(115'' - 120'') \times 10}{18''} < Z < \frac{(130'' - 120'') \times 10}{18''}\right)$$

$$\simeq \Phi(5,556) - \Phi(-2,777)$$

$$\simeq 1 - (1 - \Phi(2,777)) \simeq 0,99726.$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

(3) Si deve imporre

$$\begin{aligned} 0,95 &\leq \mathbb{P}(|\bar{T}_n - 120''| \leq 4'') \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{|\bar{T}_n - 120''|\sqrt{n}}{18''} \leq \frac{4''\sqrt{n}}{18''}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{2}{9}\sqrt{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

da cui si deduce

$$\frac{2}{9}\sqrt{n} \geq q_{0,975} = 1,96 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \geq 8,82 \quad \Rightarrow \quad n \geq 78.$$

Esercizio 3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8



Un ingegnere civile costruisce un ponte che può sopportare un peso massimo di 200 tonnellate. Si supponga che il peso (espresso in tonn.) di un'automobile sia una v.a. di media 1 e dev.st. 0.1. Quante auto devono transitare contemporaneamente sul ponte affinché con probabilità superiore a 0.1 venga superato il peso massimo sopportato dal ponte?

Soluzione es.3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Fissato un campione di n auto, indicato con X_i la v.a. che descrive il peso della i -sima auto ($i = 1, \dots, n$) dal testo si sa che $\mathbb{E}(X_i) = 1$ e $\text{var}(X_i) = (0.1)^2 = 0.01$.

Supponiamo che le X_i siano v.a. indipendenti e identicamente distribuite.

Il peso totale delle auto che transitano sul ponte è descritto dalla v.a. $S_n = X_1 + \dots + X_n$, quindi si tratta di determinare il valore di n per cui risulta $\mathbb{P}(S_n > 200) > 0.1$.

Soluzione es.3

Per il TCL si ha che $S_n \sim \mathcal{N}(1 \cdot n, 0.01 \cdot n)$, quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > 200) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{0.1\sqrt{n}} > \frac{200 - n}{0.1\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{200 - n}{0.1\sqrt{n}}\right) > 0.1\end{aligned}$$

con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dunque deve essere $1 - \Phi\left(\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}}\right) > 0.1$,
cioè $\Phi\left(\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}}\right) < 0.9$, da cui si deduce che $\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}} < q_{0.9}$.
Consultando le tavole della normale si trova $q_{0.91} = 1.28$ e
sostituendo si ottiene quindi la disequazione $\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}} < 1.28$.
Risolvendo la disequazione si trova il valore minimo di n ,
ossia $n \geq 199$.

Esercizio 4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

La distanza d di una stella è calcolata come la media di una serie di misurazioni indipendenti e identicamente distribuite con media d e varianza 4.

Quante osservazioni sono necessarie per essere sicuri al 95% che la media delle osservazioni approssimi d entro 0.5?

Soluzione es.4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Sia X_i la i -sima misurazione della distanza. Dal testo è noto che le var. X_i sono iid con media d e $\text{var} = 4$. La distanza della stella è misurata effettuando n osservazioni X_i e calcolando poi la media campionaria $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Il problema consiste dunque nel determinare n in modo tale che $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - d| < 0.5) = 0.95$.

Soluzione es.4

Dal TCL si sa che $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, quindi si può scrivere:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\bar{X}_n - d| < 0.5) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - d\right| < 0.5\right) \\&= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{n}\right| < 0.5\right) \\&= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{n}\right| \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot \sigma}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{\sqrt{n} \cdot \sigma}\right| < \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot \sigma}\right) \\&= \mathbb{P}(|Z| < \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot 2}) = 0.95\end{aligned}$$

con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Soluzione es.4

Ma

$$\mathbb{P}(|Z| < \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot 2}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{4}) =$$

$$= \Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - (1 - \Phi(\frac{\sqrt{n}}{4})) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - 1 = 0.95$$

da cui segue

$$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) = 0.975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} = 1.96 \Rightarrow n = 62.$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 5

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8



La percentuale di realizzazione nei tiri da due punti di un giocatore di pallacanestro è del 55%. Si calcolino:

- 1 la probabilità che segni non più di 50 punti in 50 tiri
- 2 il numero minimo di tiri che deve effettuare affinché la probabilità di segnare almeno 100 punti sia non inferiore a 0.9

Soluzione es.5

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

- ① Sia X_{50} la v.a. che indica il numero di canestri su 50 tiri, allora $X_{50} \sim \text{Bin}(50, 0.55)$.

Poiché $np = 27.5 > 5$ e $n(1 - p) = 22.5 > 5$, possiamo utilizzare l'approssimazione normale, ossia $X_{50} \simeq \mathcal{N}(27.5, 12.375)$. Dunque

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{50} \leq 25) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_{50} - 27.5}{\sqrt{12.375}} < \frac{25.5 - 27.5}{\sqrt{12.375}}\right) \simeq \Phi(-0.57) \\ &= 1 - \Phi(0.57) = 0.28\end{aligned}$$

- ② Detta X_n la v.a. che indica il numero di canestri su n tiri, si chiede di determinare n in modo che risulti $\mathbb{P}(X_n \geq 50) \geq 0.9$.

Soluzione es.5

Utilizzando l'approssimazione normale si ha
 $X_n \sim \text{Bin}(n, 0.55) \simeq \mathcal{N}(n \cdot 0.55, n \cdot 0.2475)$. Dunque

$$\begin{aligned} 0.9 &\leq \mathbb{P}(X_n \geq 50) = \mathbb{P}(X_n > 49.5) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X_n - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}} > \frac{49.5 - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}}\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{49.5 - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}}\right), \end{aligned}$$

da cui segue

$$\Phi\left(\frac{49.5 - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}}\right) \leq 0.1 \Leftrightarrow \frac{49.5 - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}} \leq q_{0.1} = -1.2816.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 101.7$ ossia
 $n \geq 102$.

Esercizio 6



Due dadi equilibrati vengono lanciati 300 volte. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si è ottenuto un doppio uno.

- 1 Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\text{var}(X)$
- 2 Calcolare in modo approssimato la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte.
- 3 Quante volte bisogna lanciare i due dadi affinché la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte sia maggiore di 0.5?

Soluzione es.6

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

(1) Poichè $X \sim B(300, \frac{1}{36})$, si ha che $\mathbb{E}(X) = \frac{300}{36} = 8.33$ e
 $\text{var}(X) = \frac{300}{36} \cdot \frac{35}{36} = \frac{875}{108}$

(2) Utilizzando l'approssimazione della binomiale con la normale si ottiene

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10.5) \simeq$$

$$\simeq 1 - \mathbb{P}(N \leq 10.5) \simeq 1 - \mathbb{P}(N \leq \frac{10.5 - 8.33}{\sqrt{8.10}}) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.76) \simeq 1 - \phi(0.76) \simeq 0.22363$$

dove $N \simeq \mathcal{N}(8.33, 8.10)$.

Soluzione es.6

- (2) Occorre determinare n tale che $\mathbb{P}(X > 10) > 0.5$.
Utilizzando nuovamente l'approssimazione normale si ha

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10.5) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - \frac{n}{36}}{\sqrt{\frac{n35}{36^2}}} \leq \frac{10.5 - \frac{n}{36}}{\sqrt{\frac{n35}{36^2}}}\right) > 0.5$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{378 - n}{\sqrt{35n}}\right) < 0.5 \Leftrightarrow \phi\left(\frac{378 - n}{\sqrt{35n}}\right) < 0.5$$

$$\frac{378 - n}{\sqrt{35n}} < q_{0.5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{378 - n}{\sqrt{35n}} < 0 \Leftrightarrow n > 378$$

Esercizio 7

Si consideri un sistema elettronico composto da $n = 100$ componenti e che funziona se e solo se almeno 30 componenti su 100 funzionano. Si supponga inoltre che tutte le componenti abbiano la stessa probabilità di funzionare $p = 0.2$ e che funzionino indipendentemente una dall'altra.

- 1 In base al modello dato, qual è il numero atteso di componenti funzionanti? Quanto vale la varianza del numero di componenti funzionanti?
- 2 Calcolare in modo approssimato la probabilità che il sistema descritto funzioni.
- 3 Fornite una stima della probabilità che il numero di componenti NON funzionanti sia compreso fra 72 e 88 (inclusi).

Soluzione es.7

Indicata con X la variabile aleatoria che conta il numero di componenti funzionanti su 100, allora X ha legge binomiale di parametri $p = 0.2$ e $n = 100$. Pertanto,

(1) $\mathbb{E}(X) = 100 \cdot 0.2 = 20$ e $\text{var}(X) = 100 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 16$.

(2)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\text{almeno 30 componenti su 100 funzionano}\} \\ &= \mathbb{P}(X \geq 30) \\ &= 1 - \mathbb{P}\{\text{al più 29 componenti su 100 funzionano}\} \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 29) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 29 + 0.5) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{29.5 - 20}{4}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.375) \simeq 1 - 0.99111 = 0.0089 \end{aligned}$$

dove $N \simeq N(0, 1)$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Soluzione es.7

- (3) $Y = 100 - X$ rappresenta il numero di componenti non funzionanti su 30; Y ha legge binomiale di parametri $q = 1 - 0.2 = 0.8$ e $n = 100$.

Stimiamo la probabilità cercata usando

l'approssimazione normale per la legge binomiale e la "correzione di continuità", che migliora

l'approssimazione per variabili aleatorie a valori intere.

Pertanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(72 \leq Y \leq 88) &= \mathbb{P}(72 - 0.5 \leq Y \leq 88 + 0.5) \\ &\simeq \mathbb{P}(71.5 \leq N \leq 88.5) = (*)\end{aligned}$$

dove $N \simeq \mathcal{N}(100 \cdot 0.8, 100 \cdot 0.8 \cdot 0.2) = \mathcal{N}(80, 16)$

$$\begin{aligned} (*) &= \Phi\left(\frac{88.5 - 80}{4}\right) - \Phi\left(\frac{71.5 - 80}{4}\right) \\ &= \Phi(2.125) - \Phi(-2.125) \\ &= 2\Phi(2.125) - 1 \simeq 0.9664134. \end{aligned}$$

Esercizio 8

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8



In media in un paracadute su 1000 il paracadute principale è difettoso e non si apre durante il lancio. Un paracadutista professionista compie 4000 lanci nella sua carriera; indichiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di volte in cui il paracadute principale non si apre.

Se si approssima la distribuzione di X con una Normale, quanto vale la probabilità che il paracadute principale non si apra in almeno uno dei 4000 lanci?

Soluzione es.8

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Approssim.
normale della
distribuzione
Binomiale

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

La X è una var. Binomiale di parametri $n = 4000$ e $p = \frac{1}{1000} = 0,001$.

In approssimazione Normale, risulta

$$X \simeq Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p)), \text{ cioè } Y \simeq \mathcal{N}(4, 3.996). \text{ Dunque}$$
$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X > 0) \simeq \mathbb{P}(Y > 0.5) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-4}{\sqrt{3.996}} > \frac{0.5-4}{\sqrt{3.996}}\right) =$$
$$\Phi(1.75) = 0.95994$$

Osserviamo che il numero esatto calcolato con la Binomiale è $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (0.999)^{4000} = 0.9817$.