

Il modello di Bernoulli

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

DEFINIZIONE DI V.A. $\mathcal{B}(p)$

Una v.a. di Bernoulli di parametro p è una v.a. che può assumere solo i valori 0 e 1, e per cui la probabilità di assumere il valore 1 è pari a p , e quella di assumere il valore 0 è pari a $1 - p$.

Ricordiamo: di una v.a. (discreta) interessano

- i valori che può assumere;
- la funzione di densità.

Per la Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

L'insieme dei valori possibili è $V = \{0, 1\}$; $f_X(0) = 1 - p$ e $f_X(1) = p$.

Bernoulli

Densità

Valore atteso

Varianza

Binomiale

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Geometrica

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Indipendenza

Esempi

Proprietà

Approfondiamo

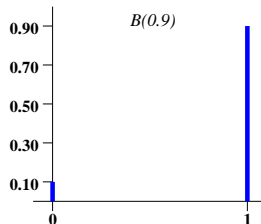
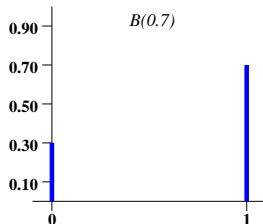
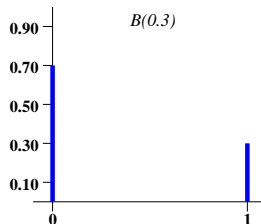
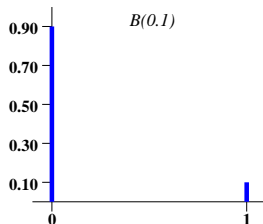
Varianza in funzione
di p

Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$

La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$

Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

La densità



Il caso equiprobabile

Bernoulli

Densità

Valore atteso

Varianza

Binomiale

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Geometrica

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Indipendenza

Esempi

Proprietà

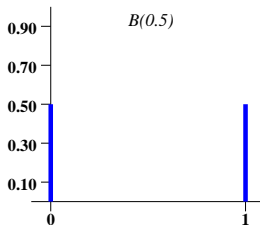
Approfondiamo

Varianza in funzione
di p

Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$

La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$

Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$



Qui le due barre sono alte entrambe $1/2$. Questo è il caso ad esempio dell'esito del lancio di una moneta (equilibrata) dove “testa” = 1 e “croce” = 0.

Utilizzo della Bernoulli

Bernoulli

Densità

Valore atteso

Varianza

Binomiale

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Geometrica

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Indipendenza

Esempi

Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione di p

Il valore atteso di $B(n, p)$

La varianza di $B(n, p)$

Assenza di memoria di $\mathcal{G}(p)$

Si usa in tutte gli esperimenti (aleatori) in cui posso avere solo due esiti, ad esempio:

- lancio di una moneta: esito testa oppure croce;
- screening di malattie: l'individuo o è sano oppure è malato;
- ricerca di presenza di antigeni: o l'antigene c'è, oppure no,
- esperimento per sintetizzare una proteina (un ormone, etc): o la sintesi avviene oppure no.

Nomenclatura

Il valore 0 è anche detto **insuccesso** e il valore 1 è detto **successo**.

Esperimento di Bernoulli

Bernoulli

Densità

Valore atteso

Varianza

Binomiale

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Geometrica

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Indipendenza

Esempi

Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p

Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$

La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$

Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Definizione

Un esperimento aleatorio che può avere solo due esiti è detto esperimento di Bernoulli (o anche prova di Bernoulli).

Gli esperimenti che abbiamo appena citato come esempi sono quindi esperimenti di Bernoulli.

Il valore atteso della $\mathcal{B}(p)$

Bernoulli

Densità

Valore atteso

Varianza

Binomiale

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Geometrica

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Indipendenza

Esempi

Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$ La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$ Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Sia X una v.a. di Bernoulli di parametro p , in simboli:

$$X \sim \mathcal{B}(p) *$$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Teorema

Per la Bernoulli il valore atteso coincide con la probabilità del successo (dunque col parametro p).

* Il simbolo “ \sim ” in $X \sim \mathcal{B}(p)$ **NON SI LEGGE “CIRCA”!**

Si legge “ X **è** una v.a. di Bernoulli di parametro p ”.

La varianza della $\mathcal{B}(p)$

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Sia $X \sim \mathcal{B}(p)$, calcoliamo $\text{Var}(X)$: X^2 assume valori 0 e 1, con probabilità $1 - p$ e p rispettivamente

$$\mathbb{E}(X^2) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p,$$

quindi

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Teorema

Per la Bernoulli la varianza coincide con $p(1 - p)$.

Il processo di Bernoulli

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione di p
Il valore atteso di $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria di $\mathcal{G}(p)$

Definizione di processo di Bernoulli di parametro p

Una sequenza (finita o infinita) di prove di Bernoulli, tutte con lo stesso parametro p e fra loro indipendenti*, è detta processo di Bernoulli di parametro p .

Dato un processo di Bernoulli è naturale porsi due tipi di domande:

- se faccio n prove, qual è la probabilità che si abbiano k successi?
- qual è la probabilità che il successo appaia per la prima volta alla j -esima prova?

* non abbiamo ancora dato la nozione di v.a. **indipendenti**

La v.a. binomiale

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$ Definizione di v.a. $\mathcal{B}(n, p)$

La v.a. che conta il numero di successi in n prove di un processo di Bernoulli di parametro p è detta v.a. binomiale di parametri n e p .

Per la binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

L'insieme dei valori possibili è $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$;

$$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Bernoulli

Densità

Valore atteso

Varianza

Binomiale

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Geometrica

Densità

Esempio

Valore atteso

Varianza

Indipendenza

Esempi

Proprietà

Approfondiamo

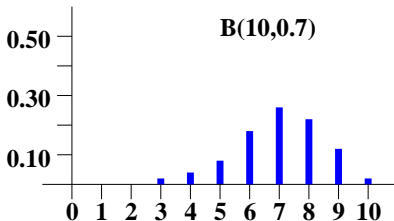
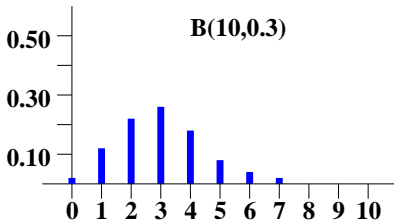
Varianza in funzione
di p

Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$

La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$

Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Alcuni esempi di densità binomiali.



Il caso equiprobabile

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

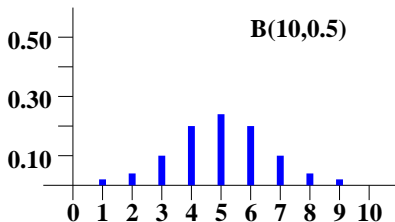
Approfondiamo

Varianza in funzione
di p

Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$

La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$

Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$



Esempio

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Un test a risposta multipla ha 10 domande, ognuna con 4 risposte (di cui una sola corretta).

Se rispondiamo a caso, qual è la probabilità di dare 6 risposte corrette e 4 errate?

Se X è la v.a. che conta le risposte corrette, $X \sim \mathcal{B}(10, 0.25)$ e mi si chiede

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = 6) &= \binom{10}{6} 0.25^6 \cdot 0.75^4 \\
 &= \frac{10!}{6!4!} 0.25^6 \cdot 0.75^4 \\
 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdots 1 \cdot 4 \cdots 1} 0.25^6 \cdot 0.75^4 \\
 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} 0.25^6 \cdot 0.75^4 = 0.01622.
 \end{aligned}$$

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Sempre nel test a crocette: qual è la probabilità di dare **almeno** 8 risposte corrette? e di darne almeno 2?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 8) &= \mathbb{P}(X = 8) + \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 10) \\ &= \text{calcolo con la densità come prima} \\ &= 0.00004158.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= \mathbb{P}(X = 2) + \cdots + \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 10) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.75^{10} - \binom{10}{1} 0.25 \cdot 0.75^9 \\ &= 1 - (0.75^{10} + 10 \cdot 0.25 \cdot 0.75^9) = 0.75597.\end{aligned}$$

Valore atteso di $\mathcal{B}(n, p)$

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Teorema

Se $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, allora

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

Esempi.

- Se lancio 10 volte una moneta equilibrata, qual è la media teorica del numero totale di teste? Risposta:
 $5 = 10 \cdot 0.5$.
- Nel test a risposta multipla, qual è la media teorica del numero totale di risposte corrette? Risposta:
 $2.5 = 10 \cdot 0.25$.

Varianza di $\mathcal{B}(n, p)$

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Teorema

Se $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, allora

$$\text{Var}(X) = np(1 - p).$$

La v.a. geometrica

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$ Definizione di v.a. $\mathcal{G}(p)$

La v.a. che dice in quale prova di un processo di Bernoulli di parametro p si ha il primo successo è detta v.a. geometrica di parametro p .

Per la geometrica $\mathcal{G}(p)$

L'insieme dei valori possibili è $V = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;

$$f_X(k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

Alcuni esempi di densità geometriche.

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

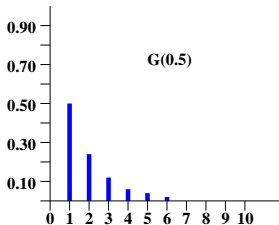
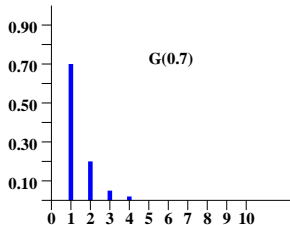
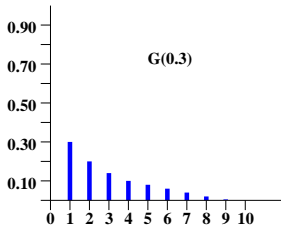
Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$



Esempio

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Maria gioca al lotto tutte le settimane, giocando sempre lo stesso numero sulla stessa ruota (i numeri che possono essere estratti sono 90), con l'intenzione di smettere non appena vincerà. Qual è la probabilità che vinca la prossima settimana?

Ogni estrazione per Maria è una $\mathcal{B}(1/90)$ ed è logico pensare che le estrazioni siano indipendenti, quindi si tratta di un processo di Bernoulli. La probabilità che vinca la prossima settimana è $1/90$.

Qual è la probabilità che iniziando la prossima settimana vinca alla quinta giocata? Qual è la probabilità che iniziando la prossima settimana vinca **entro** 10 giocate?

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

La v.a. che dice qual è la settimana della vincita è $X \sim \mathcal{G}(1/90)$, quindi la probabilità che iniziando la prossima settimana Maria vinca alla quinta giocata è

$$\mathbb{P}(X = 5) = p(1 - p)^4 = \frac{1}{90} \cdot \left(\frac{89}{90}\right)^4 = 0.0106.$$

La probabilità che iniziando la prossima settimana vinca entro 10 giocate è

$$\mathbb{P}(X \leq 10) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{90} \cdot \left(\frac{89}{90}\right)^{i-1} = 0.1057.$$

Se $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k.$$

Basta sommare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq k) &= \sum_{i=1}^k p \cdot (1 - p)^{i-1} \\ &= p \sum_{i=0}^{k-1} (1 - p)^i = 1 - (1 - p)^k.\end{aligned}$$

(Un aiuto può venire dal libro di matematica, capitolo sulla serie geometrica...).

Ma bastava anche ragionare sul complementare:

$$\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k) = 1 - (1 - p)^k,$$

dato che la probabilità che i primi k tentativi siano insuccesso è proprio $(1 - p)^k$ (usiamo l'indipendenza, vedi più avanti...).

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Il successo arriva?

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$ Continuità di \mathbb{P} Siano $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eventi tali che $A_{i+1} \supseteq A_i$ allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Siano $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eventi tali che $A_{i+1} \subseteq A_i$ allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Il successo arriva?

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Sappiamo che X è a valori in $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Ci chiediamo:
quanto vale $\mathbb{P}(X < +\infty)$ se $p \in (0, 1]$?

Una possibilità è quella di utilizzare la serie geometrica.
L'altra è osservare che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < +\infty) &= 1 - \mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > i) \\ &= 1 - \lim_{i \rightarrow +\infty} (1 - p)^i = 1.\end{aligned}$$

Valore atteso di $\mathcal{G}(p)$

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Teorema

Se $X \sim \mathcal{G}(p)$, allora

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

Esempi.

- Lanciando una moneta equilibrata, qual è la media teorica del numero di lanci da fare per vedere la prima testa? Risposta: $2 = \frac{1}{0.5}$.
- In un test (infinito) a risposta multipla, qual è la media teorica del numero di risposte da dare per vedere la prima corretta? Risposta: $4 = \frac{1}{0.25}$.

Varianza di $\mathcal{G}(p)$

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Teorema

Se $X \sim \mathcal{G}(p)$, allora

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Indipendenza di v.a. discrete

Diamo ora la nozione di v.a. indipendenti.

DEFINIZIONE DI V.A. DISCRETE INDIPENDENTI

Date n v.a. X_1, X_2, \dots, X_n , esse si dicono indipendenti se vale l'uguaglianza

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = v_1, X_2 = v_2, \dots, X_n = v_n) \\ = \mathbb{P}(X_1 = v_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = v_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = v_n),\end{aligned}$$

per ogni scelta di v_1 possibile valore per X_1 , v_2 possibile valore per X_2 , \dots v_n possibile valore per X_n .

$\mathbb{P}(X_1 = v_1, X_2 = v_2, \dots, X_n = v_n)$ significa “probabilità che contemporaneamente X_1 assuma il valore v_1 , X_2 il valore v_2 , \dots , cioè $\mathbb{P}(\{X_1 = v_1\} \cap \dots \cap \{X_n = v_n\})$.”

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione di p
Il valore atteso di $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria di $\mathcal{G}(p)$

Indipendenza di v.a. discrete

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$ Per dire che X_1, X_2, \dots, X_n sono indipendenti

non basta che valga

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = v_1, X_2 = v_2, \dots, X_n = v_n) \\ = \mathbb{P}(X_1 = v_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = v_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = v_n),\end{aligned}$$

per qualche v_1, \dots, v_n , MA bisogna verificare l'uguaglianza
per ogni scelta di v_1, \dots, v_n .

Per dire che X_1, X_2, \dots, X_n NON sono indipendentibasta trovare n valori v_1, \dots, v_n per cui

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = v_1, X_2 = v_2, \dots, X_n = v_n) \\ \neq \mathbb{P}(X_1 = v_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = v_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = v_n).\end{aligned}$$

Esempio

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Lanciamo due dadi: X = numero sul primo dado, Y = numero sul secondo dado. Allora, ogni coppia di risultati è equiprobabile se e solo se X e Y sono indipendenti.

Vediamo il “se”. Per ogni i e j in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(\text{esce la coppia } (i, j)) = \frac{1}{36},$$

d'altra parte $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^6 \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1/6$, quindi

$$\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

e l'uguaglianza della definizione è verificata. Il “solo se” è facile (provare per esercizio).

Esempio

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Lanciamo due dadi: X = numero sul primo dado, Y = numero sul secondo dado, Z = somma dei due dadi = $X + Y$. Allora X e Z **non** sono indipendenti.

Infatti

$$\mathbb{P}(X = 1, Z = 12) = 0,$$

(non ci sono coppie con primo dado = 1 e somma = 12!!!).
D'altra parte

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6} \text{ e } \mathbb{P}(Z = 12) = \frac{1}{36},$$

quindi

$$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = 12) = \frac{1}{6 \cdot 36},$$

e l'uguaglianza della definizione NON è verificata.

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Teorema

Se X e Y sono v.a. indipendenti, allora

- 1 il valore atteso del prodotto è il prodotto dei valori attesi:

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y);$$

- 2 la varianza della somma è la somma delle varianze:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

La varianza della $\mathcal{B}(p)$

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p

Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$

La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$

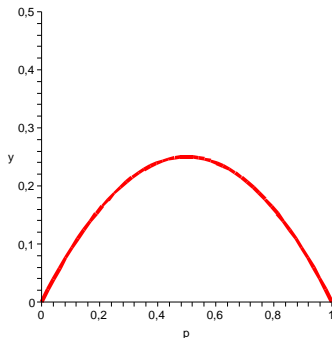
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Per quale p la varianza è massima? Ricordiamo: la varianza è una misura della dispersione o anche dell'**incertezza** dell'esito della v.a.

Se riguardiamo i grafici di densità ci accorgiamo che l'incertezza per una $\mathcal{B}(p)$ o per una $\mathcal{B}(n, p)$ è minore se p è vicino a 0 oppure a 1; mentre per una $\mathcal{G}(p)$ l'incertezza diminuisce più p è vicino a 1.

La varianza di $\mathcal{B}(p)$

La varianza (funzione di p) coincide con $p(1 - p)$: è una parabola.



Il massimo della varianza di una variabile di Bernoulli è $1/4$ e lo si ottiene in corrispondenza a $p = 1/2$.

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione di p

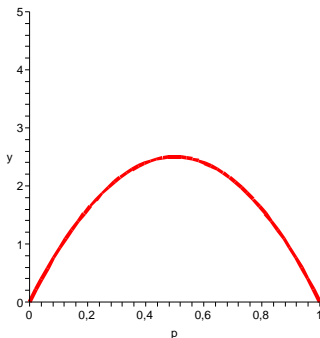
Il valore atteso di $\mathcal{B}(n, p)$

La varianza di $\mathcal{B}(n, p)$

Assenza di memoria di $\mathcal{G}(p)$

La varianza di $\mathcal{B}(n, p)$

La varianza (funzione di p) coincide con $np(1 - p)$: è una parabola. Ad esempio per $n = 10$:



La varianza di una variabile binomiale è $n/4$ e lo si ottiene in corrispondenza a $p = 1/2$.

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione di p

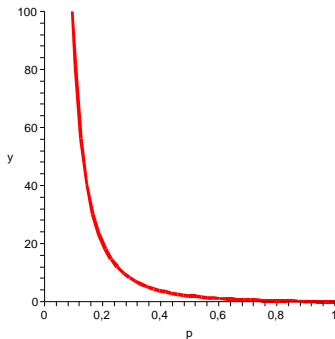
Il valore atteso di $\mathcal{B}(n, p)$

La varianza di $\mathcal{B}(n, p)$

Assenza di memoria di $\mathcal{G}(p)$

La varianza di $\mathcal{G}(p)$

La varianza (funzione di p) coincide con $\frac{1-p}{p^2}$:



La varianza di una variabile geometrica è decrescente rispetto a $p \in [0, 1]$.

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione di p

Il valore atteso di $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria di $\mathcal{G}(p)$

Il calcolo di $\mathbb{E}(\mathcal{B}(n, p))$

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$ La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$ Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Dimostrazione

Il trucco sta nell'osservare che se $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si può pensare

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$

dove Y_k vale 1 se la k -esima prova è un successo, 0 altrimenti. Ma è lo stesso che dire che Y_1, Y_2, \dots, Y_n sono le n v.a. di Bernoulli corrispondenti alle prime n prove del processo. Allora

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) + \cdots + \mathbb{E}(Y_n) = p + p + \cdots + p = np.$$

(Abbiamo usato la linearità del valore atteso).

Il calcolo di $\text{Var}(\mathcal{B}(n, p))$

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione
di p
Il valore atteso di
 $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di
 $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria
di $\mathcal{G}(p)$

Dimostrazione

Scrivendo ancora

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$

dove Y_1, Y_2, \dots, Y_n sono le n v.a. di Bernoulli corrispondenti alle prime n prove del processo, abbiamo

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) + \cdots + \text{Var}(Y_n) \\ &= p(1-p) + p(1-p) + \cdots + p(1-p) = np(1-p).\end{aligned}$$

(Abbiamo usato la proprietà della varianza di una somma di v.a. indipendenti).

Assenza di memoria di $\mathcal{G}(p)$

Abbiamo fatto k esperimenti di Bernoulli senza vedere un successo: ci chiediamo quanto sia necessario aspettare ancora per vedere un successo.

Data $X \sim \mathcal{G}(p)$, matematicamente vogliamo calcolare

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > k + n | X > k) &= \frac{\mathbb{P}(X > k + n, X > k)}{\mathbb{P}(X > k)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > k + n)}{\mathbb{P}(X > k)} \\ &= \frac{(1 - p)^{k+n}}{(1 - p)^k} = (1 - p)^n = \mathbb{P}(X > n)\end{aligned}$$

Le variabili geometriche sono le uniche variabili discrete con questa proprietà.

Bernoulli

Densità
Valore atteso
Varianza

Binomiale

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Geometrica

Densità
Esempio
Valore atteso
Varianza

Indipendenza

Esempi
Proprietà

Approfondiamo

Varianza in funzione di p
Il valore atteso di $\mathcal{B}(n, p)$
La varianza di $\mathcal{B}(n, p)$
Assenza di memoria di $\mathcal{G}(p)$