

Cosa dobbiamo già conoscere?

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

- Come opera la matematica: dagli assiomi ai teoremi.
- Che cosa è una **funzione**, il suo **dominio** e il suo **codominio**.
- Che cosa significa $\bigcup_{j=1}^n A_j$ dove A_j sono insiemi ed $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
- Che cosa significa $\sum_{j=1}^n a_j$ dove a_j sono numeri.
- Saper “contare”, ovvero il calcolo combinatorio.
- (Più avanti) Che cosa è una successione e il suo limite.

Probabilità di eventi

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Vogliamo ora attribuire ad ogni evento la sua probabilità.

Nel linguaggio comune la probabilità si esprime con percentuali: ad esempio, nel lancio di una moneta, si suole dire che “si verifica testa con probabilità del 50%”.

Non esiste una definizione rigorosa di cosa sia la **probabilità di un evento** (come neppure di insieme...). Diamo perciò una definizione informale (vedremo più avanti una definizione matematica).

La **probabilità di un evento** è un numero reale compreso fra 0 e 1 che misura quanto riteniamo probabile il verificarsi di tale evento.

Esempi di probabilità di eventi

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

- 1 Se riteniamo più probabile che Lucia stasera esca con Mario piuttosto che con Paolo, porremo
 A = Lucia stasera esce con Mario
 B = Lucia stasera esce con Paolo
e $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$ dovranno essere due numeri tali che $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$.
- 2 Se riteniamo che testa e croce abbiano la stessa probabilità, porremo
 A = esce testa
 B = esce croce
e $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.5$.

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Come definire/calcolare le probabilità?

Ci troviamo di fronte a due tipi di problemi:

- 1 come definire la probabilità dei singoli eventi, per lo meno di quelli più “semplici” (come gli eventi elementari)?
- 2 si può calcolare la probabilità di certi eventi conoscendo la probabilità di altri eventi?

Alla seconda domanda rispondiamo subito di sì con un esempio: se nel lancio della moneta la probabilità che esca testa è 0.3 (moneta truccata!) quanto vale la probabilità che esca croce?

Soluzione: 0.7 (perché?)

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

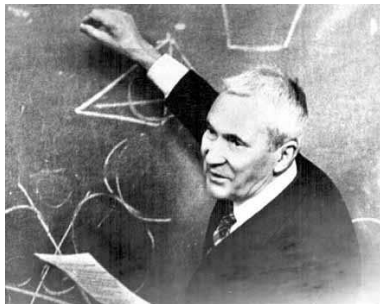
L'addittività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Definizione assiomatica di probabilità



Attorno al 1930 **Andrey Nikolaevich Kolmogorov** (1903 - 1987) scoprì che le proprietà della probabilità si potevano ricavare da pochi assiomi e pose le basi per il Calcolo delle Probabilità moderno.

I primi studi sul Calcolo delle Probabilità risalgono al 1700, motivati dalla speranza di vincere nei giochi d'azzardo. A quegli studi ci si riferisce quando si parla di *approccio classico*.

Cosa sono gli assiomi? a cosa servono?

L'idea è di dare una definizione con pochi assiomi.

Gli **assiomi** in matematica sono (poche) proprietà che si definiscono vere. Da essi si fa discendere con deduzioni logiche tutta la teoria.

ESEMPIO.

Nella geometria euclidea gli assiomi sono i pochi postulati (come quello per cui per 2 punti passa un'unica retta). La teoria comprende proprietà dedotte da questi, come ad esempio il fatto che un triangolo con due lati uguali ha anche due angoli uguali.

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

DEFINIZIONE (ASSIOMATICA) DI PROBABILITÀ.

Sia Ω uno spazio campionario e \mathcal{F} una famiglia di suoi eventi.
Si chiama probabilità su Ω una qualsiasi funzione

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

con le proprietà

- (a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (b) se $\{A_n\}_n$ è una successione numerabile di eventi a due a due disgiunti allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

Se Ω è discreto si considera \mathcal{F} costituita da **tutti** i sottoinsiemi di Ω , cioè $\mathcal{F} = \text{Parti}(\Omega)$.

In generale \mathcal{F} non è detto sia $\text{Parti}(\Omega)$ ma deve essere una famiglia con determinate proprietà.

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

DEFINIZIONE DI σ -algebra.

Sia Ω uno spazio campionario e \mathcal{F} una famiglia di suoi eventi. \mathcal{F} si σ -algebra in Ω se soddisfa le seguenti proprietà:


- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- (ii) se $A \in \mathcal{F}$ allora $A^c \in \mathcal{F}$
- (iii) se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una collezione di insiemi di \mathcal{F} allora $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Perché serve la (iii)? Pensiamo al caso di ripetuti lanci di una moneta. Sia A_i l'evento "al lancio i -esimo è uscita testa"; che cosa rappresenta $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$? Prima o poi esce testa.

Gli assiomi nella definizione

Formalmente gli assiomi che poniamo veri per la definizione di misura di probabilità \mathbb{P} sono:

- 1 \mathbb{P} è una funzione con **dominio** una famiglia di sottoinsiemi di Ω e **codominio** i numeri tra 0 e 1.

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1].$$


Non tutte le funzioni possono essere probabilità.

- se \mathbb{P} è tale che un qualche evento A ha $\mathbb{P}(A) < 0$ oppure $\mathbb{P}(A) > 1$ allora \mathbb{P} NON è una probabilità (viola il primo assioma!).
- CONSEGUENZA: se in un calcolo otteniamo che la probabilità di un certo evento è un numero < 0 oppure > 1 abbiamo sbagliato qualcosa!

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Il secondo assioma

- ② l'evento certo deve avere probabilità pari ad 1:
 $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$

Non tutte le funzioni a valori in $[0,1]$ possono essere probabilità.

- ad esempio \mathbb{P} con $\mathbb{P}(\Omega) = 0.8$ e $\mathbb{P}(A) = 0.2$ per ogni $A \neq \Omega$ NON è una probabilità (viola il secondo assioma!).
- CONSEGUENZA: se in un calcolo otteniamo $\mathbb{P}(\Omega) < 1$ abbiamo sbagliato qualcosa!

L'assioma di additività

dal terzo assioma (detto della σ -additività) discende immediatamente che

- ③ \mathbb{P} deve soddisfare la richiesta di **additività**: se gli A_j sono a due a due disgiunti allora

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) \quad . \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) \quad . \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j) \quad . \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$$

Nota: al primo membro l'evento unione degli A_j e la sua probabilità; al secondo membro le probabilità dei singoli A_j e la loro somma.

La vera definizione di Kolmogorov

Comprende in realtà la cosiddetta numerabile additività, cioè si chiede che la formula precedente valga anche con $n = \infty$ (e in tal caso la somma diventa una serie).

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

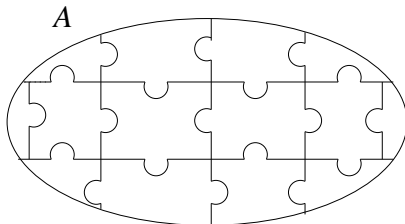
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

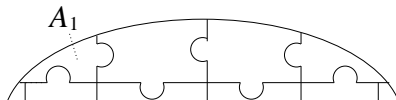
Cosa significa il terzo assioma?

Chiamiamo A l'evento $\bigcup_{j=1}^n A_j$.

A è diviso in pezzi come un *puzzle*:



A è diviso in pezzi come un *puzzle*: A_1



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

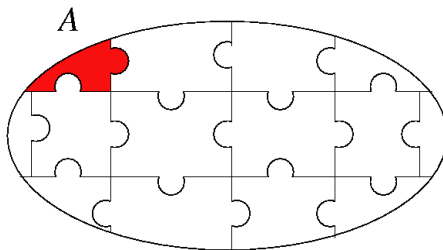
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

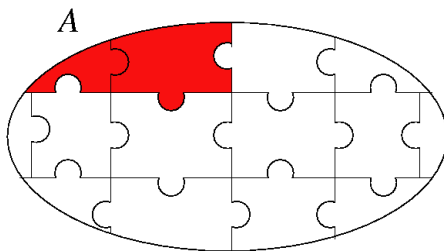
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

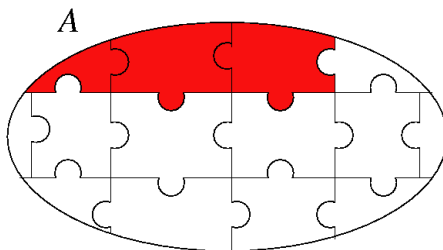
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

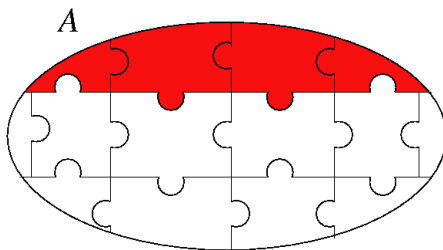
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

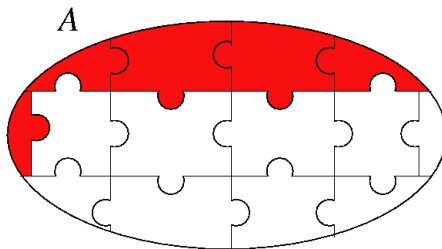
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_5) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

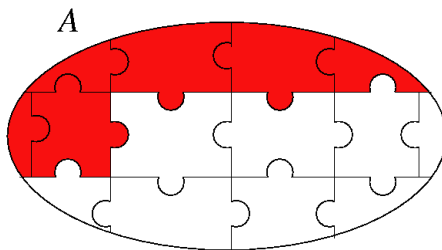
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_6) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

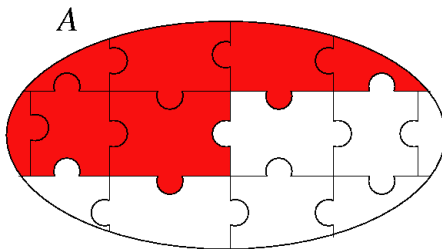
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_7) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

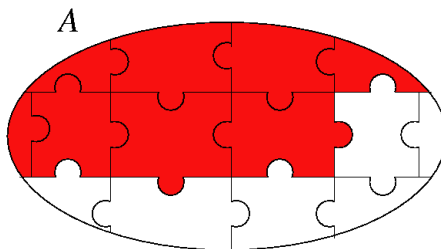
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_8) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

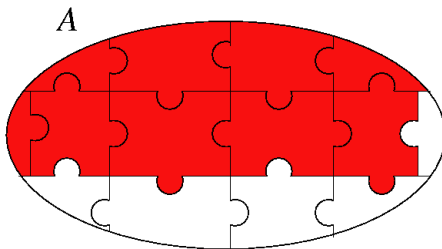
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_9) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

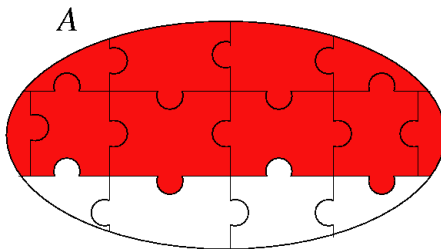
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{10}) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

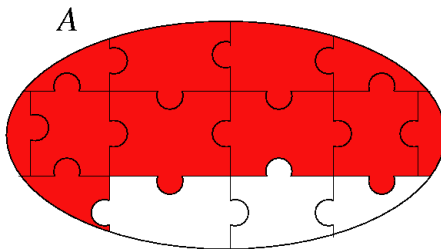
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{11}) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

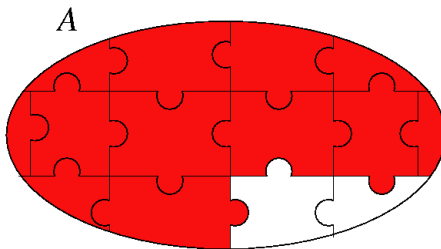
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{12}) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

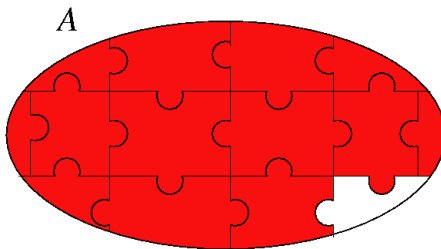
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_{13}) \dots$$



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

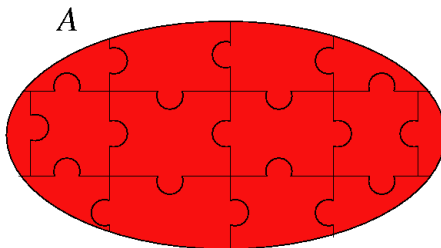
Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Cosa significa il terzo assioma?

Se rappresentiamo in figura la probabilità di un evento come la sua area, avremo che

e infine $\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$ (qui $n = 14$)



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Un esempio

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Paolo non ha ancora deciso cosa farà domani sera. Potrebbe stare in casa oppure uscire, nel qual caso o andrebbe in palestra o al cinema. Sappiamo che la probabilità che vada in palestra è 0.3 e quella che vada al cinema 0.2 (e supponiamo che la palestra e il cinema si escludano a vicenda). Qual è la probabilità che esca?

Chiamiamo

A l'evento "Paolo domani sera esce",

A_1 = "Paolo domani sera va in palestra",

A_2 = "Paolo domani sera va al cinema"

Allora $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

e $\mathbb{P}(A_1) = 0.3$, $\mathbb{P}(A_2) = 0.2$.

Quanto vale $\mathbb{P}(A)$? **Soluzione: 0.5.**

Eventi a 2 a 2 disgiunti

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità
L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Per ricavare la probabilità di uscire come $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$ è fondamentale che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, altrimenti conteremmo l'intersezione due volte.

Esattamente come nei *puzzle* i pezzi non si sovrappongono!

3 eventi non disgiunti a 2 a 2

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

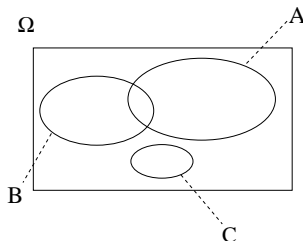
L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Ma se A , B e C sono



allora **non è vero che** $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$
(notate che c'è una parte che contate due volte...).

Eppure $A \cap B \cap C = \emptyset!!!$

Successioni di eventi disgiunti a 2 a 2

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Evidentemente $A \cap B \cap C = \emptyset$ non basta, occorre la proprietà più forte che gli eventi siano **a due a due disgiunti** (=nessuna parte in comune),
cioè che $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$.

Idem se gli eventi sono 4, 5, eccetera. Cominciano a essere molte condizioni da scrivere! Ne scriviamo una sola che racchiude tutti i casi possibili.

DEFINIZIONE.

Una famiglia di eventi $\{A_1, \dots, A_n\}$ è una famiglia di eventi a due a due disgiunti se $A_i \cap A_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.

La definizione è la stessa anche nel caso di famiglie di eventi $\{A_i\}_i$ infinite.

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità
L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Proprietà della probabilità

Con il solo utilizzo degli assiomi si dimostrano le seguenti proprietà.

TEOREMA.

Data una probabilità \mathbb{P} valgono le seguenti proprietà:

- 1 $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- 2 $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- 3 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- 4 Se $A \supseteq B$ allora $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$; in particolare $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$.

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Dimostrazione.

- 1 Uso la additività con $A_1 = \emptyset$ e $A_2 = \emptyset$. Notate che $\emptyset = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (quindi sono disgiunti). Allora

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2),$$

da cui

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset),$$

sottraggo membro a membro $\mathbb{P}(\emptyset)$ e ottengo

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset).$$

- 2 Poiché

$$A \cup A^c = \Omega$$

usando la additività si ha

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$$

(ricordiamoci che $\mathbb{P}(\Omega) = 1$). Portiamo $\mathbb{P}(A)$ al secondo membro e il gioco è fatto.

D. Bertacchi
F. Zucca

3 Disegniamo i due eventi A e B in posizione generica:

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

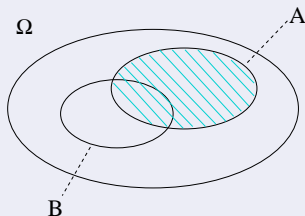
La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

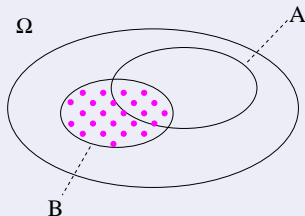
Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

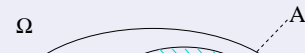
The bag of
tricks



$A \cup B$ è composto da: A



$A \cup B$ è composto da: A e B



Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità

L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

Dimostrazione.

4 Se $A, B \subseteq \Omega$ allora

$$A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$$

da cui $A \setminus B$ è un evento. Si osservi che $A \setminus B$ è disgiunto da A e
 $B \cup (A \setminus B) = A \cup B \equiv A$. Da cui, utilizzando l'additività della misura di
probabilità

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cup (A \setminus B)) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \setminus B).$$

Problema:
cosa è la
probabilità?

Definizione
assiomatica

La definizione
assiomatica di
probabilità

La definizione
assiomatica di
probabilità
L'additività

Eventi a 2 a 2
disgiunti

Conseguenze degli
assiomi

The bag of
tricks

La nostra “cassetta degli attrezzi”

Ecco le formule che abbiamo concernenti il calcolo di probabilità:

- 1 $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- 2 $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- 3 se A e B sono disgiunti: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- 4 se A e B **non** sono disgiunti:
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
- 5 con più di due insiemi, ma a due a due disgiunti: la finita e la numerabile additività