

# Cosa dobbiamo già conoscere?

## Motivazioni

Esempi  
Esempi

## Lo spazio campionario

Esempi  
Eventi = sottoinsiemi  
L'implicazione logica

- Insiemistica (operazioni, diagrammi...).
- Insiemi finiti/numerabili/non numerabili.

Motivazioni

Esempi  
Esempi

Lo spazio  
campionario

Esempi  
Eventi = sottoinsiemi  
L'implicazione logica

# Perché la “probabilità”?

- In molti esperimenti l'esito non è noto *a priori*
- tuttavia si sa dire quali sono gli **esiti possibili**
- e le loro **probabilità**.

## DEFINIZIONE(non matematica).

Un esperimento aleatorio è un esperimento di cui a priori non si conosce l'esito.

NOTA: il termine “aleatorio” deriva dal latino *alea* che significa “dado”. È quindi sinonimo di “casuale”.

## Motivazioni

Esempi  
Esempi

## Lo spazio campionario

Esempi  
Eventi = sottoinsiemi  
L'implicazione logica

# Fenomeni dove il modello è aleatorio

- Intrinsecamente aleatori: fisica quantistica.
- Deterministici ma con forte dipendenza dal dato iniziale (Sistemi Caotici): moneta.
- Deterministici ma con dipendenza da molte variabili non note: mercati finanziari.

I modelli probabilistici sono usati quando abbiamo a che fare con **incertezza** o **mancaanza di informazione**.

## Esempi in biologia

Le misurazioni sono spesso da ritenersi esperimenti aleatori:

1. perché affette da errore;
2. perché la quantità misurata presenta differenze fra diversi individui;
3. perché non si conoscono tutte le variabili in gioco.

Come esempi basti considerare:

1. il diametro di una cellula fissata o la lunghezza di una certa proteina denaturata;
2. il peso delle trote di un certo allevamento;
3. l'efficacia o meno di un farmaco somministrato ad un individuo malato.

# Esempi in ingegneria

Come esempi basti considerare:

1. le dimensioni di un pezzo meccanico;
2. la durata di un componente meccanico;
3. la resistenza alla rottura.

## Esempi per fissare le idee

### Motivazioni

Esempi

Esempi

### Lo spazio campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi

L'implicazione logica

- a. Estrazioni del lotto: si pesca una pallina da un'urna che ne contiene 90, numerate da 1 a 90. Esperimento: vedere che numero esce.
- b. Gioco del poker. Esperimento: vedere quali sono le 5 carte che ho in mano dopo che il mazziere ha distribuito.
- c. Lanciare più volte una moneta. Esperimento: contare quanti lanci sono necessari per vedere comparire testa.
- d. Durata di una lampadina. Esperimento: accendere una lampadina e cronometrare il tempo necessario affinché si fulmini.

## Esempi per fissare le idee

In tutti questi casi l'esito non è noto ma si sa quali sono i **casi possibili**:

- a. Estrazioni del lotto: tutti i numeri interi da 1 a 90.
- b. Gioco del poker: tutte le cinquine di carte che si possono estrarre dal mazzo da poker.
- c. Lanciare più volte una moneta: tutti i numeri interi maggiori o uguali a 1.
- d. Durata di una lampadina: tutti i numeri reali maggiori o uguali a 0.

### Quando usare modelli probabilistici

In tutti i casi in cui c'è **incertezza**. La probabilità è un modello che usiamo in questi casi.

# Lo spazio campionario

## DEFINIZIONE.

- a. I possibili esiti di un esperimento aleatorio sono detti eventi elementari.
- b. L'insieme costituito da tutti gli eventi elementari è lo spazio campionario  $\Omega$ .
- c. I sottoinsiemi di  $\Omega$  sono gli eventi.
- d. Se  $\Omega$  è finito o infinito numerabile allora è detto spazio campionario discreto, se è infinito non numerabile è detto spazio campionario continuo.

Nota: "numerabile" significa i cui elementi si possono "contare" (cioè dire "questo è il primo elemento, questo il secondo, etc."). Formalmente, sono numerabili gli insiemi che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali (dunque  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ).



## Esempi: il lotto

## Motivazioni

Esempi  
EsempiLo spazio  
campionarioEsempi  
Eventi = sottoinsiemi  
L'implicazione logica

- a. Gli eventi elementari sono tutti i numeri interi da 1 a 90.
- b.  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 89, 90\}$ .
- c. Esempio di evento elementare: “viene estratto il 5” =  $\{5\}$ .
- d. Esempio di evento non elementare: “viene estratto un numero compreso fra 87 e 90” =  $\{87, 88, 89, 90\}$ .
- e.  $\Omega$  è un insieme finito, quindi discreto.

Nota: cosa significa “finito”? Significa che possiamo scrivere un elenco di tutti gli elementi di  $\Omega$  (magari ci metteremo un po'!).

Non confondete **finito** con **limitato**! Ad esempio l'intervallo  $[2,3]$  è limitato ma infinito perché vi sono infiniti numeri ivi contenuti (non è neppure numerabile).

## Esempi: il poker

## Motivazioni

Esempi  
EsempiLo spazio  
campionarioEsempi  
Eventi = sottoinsiemi  
L'implicazione logica

- a. Gli eventi elementari sono tutte le cinquine di carte fatte con carte del mazzo da poker.
- b. Esempio di evento elementare:



- c. Esempio di evento non elementare: “ho in mano un tris” (tris di Re, di Regine,..., e poi le rimanenti due carte sono “libere”).
- d.  $\Omega$  è un insieme finito, quindi discreto. (Quanti elementi ha?)

# Esempi: i lanci per vedere testa

## Motivazioni

Esempi  
Esempi

## Lo spazio campionario

### Esempi

Eventi = sottoinsiemi  
L'implicazione logica



*Persi Diaconis*, Stanford University

# Esempi: i lanci per vedere testa

## Motivazioni

Esempi

Esempi

## Lo spazio campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi

L'implicazione logica

- a. Gli eventi elementari sono tutti i numeri interi maggiori o uguali a 1 più un simbolo  $\infty$ .
- b.  $\Omega = (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$  dove  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
- c. Esempio di evento elementare: “servono esattamente 3 lanci per vedere testa” = CCT =  $\{3\}$ .
- d. Esempio di evento elementare: “esce sempre croce” =  $\{\infty\}$ .
- e. Esempio di evento non elementare: “ottengo testa con al massimo 3 lanci” = T, CT, CCT =  $\{1, 2, 3\}$ .
- f.  $\Omega$  è un insieme numerabile, quindi discreto.

## Esempi: la lampadina



*Lampada ad arco*, olio su tela 1909, di Giacomo Balla.  
Posseduta dal Museum of Modern Art di New York.

## Esempi: la lampadina

## Motivazioni

Esempi  
EsempiLo spazio  
campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi  
L'implicazione logica

- a. Gli eventi elementari sono tutti i numeri reali maggiori o uguali a 0.
- b.  $\Omega = [0, +\infty) = \mathbb{R}^+$ .
- c. Esempio di evento elementare: “la lampadina dura esattamente 10 ore”= $\{10\}$ .
- d. Esempio di evento non elementare: “la lampadina dura almeno 10 ore”= $(10, +\infty)$ .
- e.  $\Omega$  è un insieme non numerabile (è “più numeroso”, non si riesce a numerare tutti i numeri reali...), quindi è uno **spazio campionario continuo**.

Nota: gli esempi di spazi continui che incontreremo sono  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^+$  e in generale gli intervalli reali come  $[2, 6.8]$ ,  $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ ,  $(-\infty, 1)$  etc.

# Gli eventi sono sottoinsiemi di $\Omega$

## Motivazioni

Esempi  
Esempi

## Lo spazio campionario

Esempi  
Eventi = sottoinsiemi  
L'implicazione logica

Qualche pagina fa abbiamo visto che:

### DEFINIZIONE.

I sottoinsiemi di  $\Omega$  sono gli eventi.

È a questo punto opportuno vedere che significato hanno le varie relazioni insiemistiche dal punto di vista del “linguaggio degli eventi”.

Se  $\Omega$  è discreto tutti i suoi sottoinsiemi sono eventi.

In generale non è detto che **tutti** i sottoinsiemi di  $\Omega$  siano **eventi**, ma di questo problema tecnico non ci occuperemo.

## Eventi ed insiemi

## Motivazioni

Esempi

Esempi

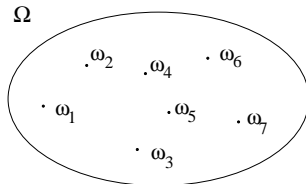
Lo spazio  
campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi

L'implicazione logica

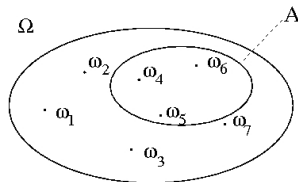
Dobbiamo pensare che quando noi effettuiamo un esperimento aleatorio, c'è un grande “sacco”  $\Omega$  da cui il “caso” pesca un singolo esito  $\omega$ .



Quindi  $\{\omega_1\}$  è l'evento “l'esito dell'esperimento è  $\omega_1$ ”.  
Si dice anche che “si verifica l'esito  $\omega_1$ ”.



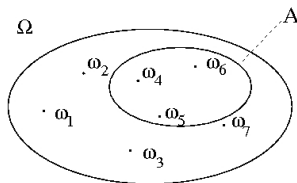
Se abbiamo un sottoinsieme  $A$



- 1  $A$  è l'evento "l'esito dell'esperimento sta in  $A$ , cioè è uno fra  $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ "
- 2  $A^c$  è l'evento "l'esito dell'esperimento non sta in  $A$ , cioè è uno fra  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_7$ "
- 3  $\Omega$  è l'**evento certo**: infatti sicuramente l'esito "estratto" sarà uno degli elementi di  $\Omega$ .
- 4  $\emptyset$  (insieme vuoto) è l'**evento impossibile**: non può verificarsi nessuno dei suoi elementi (semplicemente perché non ha elementi!).

## Idea Fondamentale

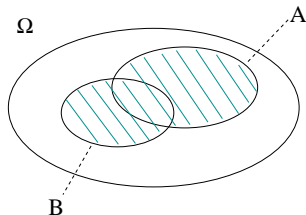
Se abbiamo un sottoinsieme  $A$



in corrispondenza alla scelta del caso dell'elemento  $\omega \in \Omega$   
diremo che

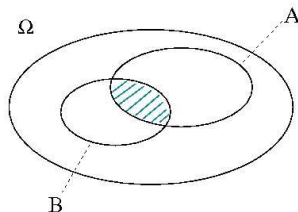
$$A \text{ accade} \iff \omega \in A.$$

# L'unione di due eventi



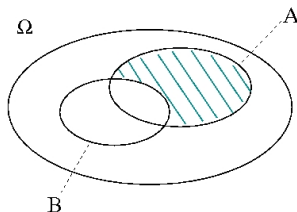
$A \cup B$  è l'evento "l'esito dell'esperimento è un elemento di  $A$  oppure di  $B$  (o di entrambi)"

# L'intersezione di due eventi



$A \cap B$  è l'evento "l'esito dell'esperimento è un elemento sia di A che di B"

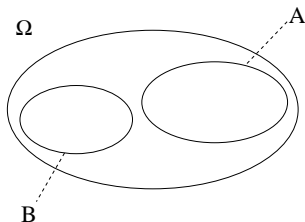
## La differenza di due eventi



$A \setminus B$  è l'evento "l'esito dell'esperimento è un elemento di  $A$  ma non di  $B$ "

# Eventi incompatibili

Se  $A$  e  $B$  sono **disgiunti**, cioè non hanno elementi in comune, ovvero  $A \cap B = \emptyset$



allora  $A$  e  $B$  sono **eventi incompatibili**, infatti non si possono verificare contemporaneamente in quanto ciò significherebbe che l'esito dell'esperimento aleatorio è un elemento sia di  $A$  che di  $B$ .

# Implicazione logica

## Motivazioni

Esempi

Esempi

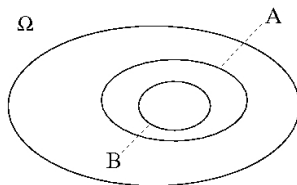
## Lo spazio campionario

Esempi

Eventi = sottoinsiemi

L'implicazione logica

Se  $A$  e  $B$  sono tali che  $B \subset A$ , cioè tutti gli elementi di  $B$  sono anche elementi di  $A$



allora il verificarsi di  $B$  **implica** il verificarsi di  $A$ .

Infatti se l'esito dell'esperimento aleatorio è un elemento di  $B$  lo è anche di  $A$ .