

Esercizio 1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

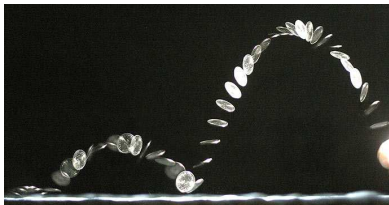
Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12



Sia n un intero maggiore di uno. Si consideri l'esperimento di lanciare $2n$ volte una moneta equilibrata. Mostrare che la probabilità $p_{n,2n}$ di osservare un numero di teste minore di n è sempre minore di $1/2$ e vale il seguente risultato:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n,2n} = 1/2.$$

Soluzione es.1

Sia X_n il numero di successi in n prove. Abbiamo che

$$\mathbb{P}(X_{2n} < n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{2n} = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}}.$$

Per simmetria, trattandosi del lancio di una moneta equilibrata:

$$\mathbb{P}(X_{2n} > n) = \mathbb{P}(X_{2n} < n)$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Soluzione es.1

Inoltre $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2n} = 1$. Quindi

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} + \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} \\ &= 2\mathbb{P}(X_{2n} < n) + \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = 1 \end{aligned}$$

da cui,

$$\mathbb{P}(X_{2n} < n) = \frac{1}{2} \left(1 - \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}\right) < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1.$$

Questo conclude la prima parte.

Soluzione es.1

Per quanto riguarda la seconda parte, utilizziamo la formula

di Stirling: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}} = \sqrt{2\pi}.$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} \frac{1}{2^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)^{2n} \sqrt{2\pi n} e^{2n}}{e^{2n} 2\pi 2n n^{2n}} \frac{1}{2^{2n}} = 0 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n,2n} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Viene condotto un esperimento costituito da N prove indipendenti, con probabilità di successo pari a p . Qual è la probabilità che il primo successo avvenga alla prova i -esima, sapendo che il successo k -esimo avviene alla prova n -esima?

Calcolo esplicito nel caso $k = 2$.

Soluzione es.2

Siano

A_i := “il primo successo è alla i -esima prova”

B := “il k -esimo successo è all' n -esima prova”. Allora

$$\mathbb{P}(B|A_i) = \begin{cases} \binom{n-1-i}{k-2} p^{k-1} (1-p)^{n-i-k+1} & n-i \geq k-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

cioè è la probabilità di avere $k-2$ successi in $n-1-i$ tentativi (dall' $i+1$ -esimo all' $n-1$ -esimo compresi).

Soluzione es.2

Inoltre $\mathbb{P}(A_i) = (1 - p)^{i-1}p$ e $\mathbb{P}(B) = \binom{n-1}{k-1}p^k(1 - p)^{n-k}$ (che è la probabilità di avere $k - 1$ successi nei primi $n - 1$ tentativi ed uno nell'ultimo). Pertanto, dalla formula di Bayes,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_i|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\binom{n-1-i}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}} \\ &= \frac{(n-i-1)!(n-k+1)!}{(n-i-k+1)!(n-1)!}(k-1).\end{aligned}$$

Nel caso particolare $k = 2$ allora $\mathbb{P}(A_i|B) = 1/(n-1)$ che è la distribuzione uniforme sui primi $n - 1$ tentativi.

Esercizio 3-Scimmie Tipografe

Sia $\{X_i\}_{i=1}^{+\infty}$ una successione di variabili indipendenti di Bernoulli di parametro $p \in (0, 1)$ e sia $(y_1, \dots, y_n) \in \{0, 1\}^n$ una sequenza finita fissata.

- 1 Mostrare che
$$\mathbb{P}(\exists i : X_i = y_1, X_{i+1} = y_2, \dots, X_{n+i-1} = y_n) = 1;$$
- 2 Mostrare che se $X := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}^n$ è l'insieme di tutte le sequenze finite di zeri ed uno allora, detta $l(y)$ la lunghezza di $y \in X$,

$$\mathbb{P}(\forall y \in X : \exists i : y = (X_i, X_{i+1}, \dots, X_{l(y)+i-1})) = 1.$$

Soluzione es.3

Si osservi che $(2) \implies (1)$, pertanto basta mostrare (2). Inoltre, essendo $\{0, 1\}$ finito anche $\{0, 1\}^n$ lo è (per ogni $n \in \mathbb{N}$) e quindi $X := \bigcup_{i=1}^{+\infty}$ è numerabile. Si definisca $A_{y,i} := \{(X_{i+1}, \dots, X_{i+l(y)}) = y\}$ (è l'evento "la sequenza di lunghezza $l(y)$ che parte da $i+1$ coincide con la sequenza y "), si ha che $\{A_{y,i \cdot l(y)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ sono indipendenti (per ogni $y \in X$ fissato) e $\mathbb{P}(A_{y,i}) = p^{\text{card}\{j: y_j=1\}}(1-p)^{\text{card}\{j: y_j=0\}} = \alpha_y > 0$.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Soluzione es.3

Pertanto si ha

$$1 \geq \mathbb{P}(\exists i : A_{y,i}) \geq \mathbb{P}(\exists i : A_{y,i \cdot l(y)}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_{y,i \cdot l(y)}^c\right) = 1$$

poiché

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_{y,i \cdot l(y)}^c\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_{y,i \cdot l(y)}^c\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p)^n = 0$$

(in realtà è sufficiente osservare che

$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_{y,i \cdot l(y)}^c) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_{y,i \cdot l(y)}^c)$ per ogni $n \geq 1$ per
giungere alla stessa conclusione).

Soluzione es.3

Osservazione: Lo stesso risultato vale anche considerando Z al più numerabile al posto di $\{0, 1\}$ con probabilità $\{p_z\}_{z \in Z}$ strettamente positive e tali che $\sum_{z \in Z} p_z = 1$; inoltre, utilizzando tecniche più raffinate, si può mostrare che, definito

$$I := \{i = 1, \dots, l(y) : y_j = y_{l(y)-i+j}, \forall j = 1, \dots, i\}$$

(ovviamente $l(y) \in I$), allora per il tempo di attesa del primo successo N della sequenza y si ha un valore medio

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i \in I} \prod_{j=1}^i p_{y_j}.$$

Esercizio 4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12



Trovate la probabilita' che in 5 lanci di un dado non truccato il 3 si presenti

- ① mai
- ② almeno una volta
- ③ quattro volte

Soluzione es.4

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si presenta 3. La probabilità di successo in questo esperimento binomiale (cioè la probabilità che si presenti 3) è pari a $1/6$ e consideriamo 5 ripetizioni dell'esperimento (cioè il dado viene lanciato 5 volte). Quindi X ha una distribuzione binomiale con parametri $n = 5$ e $p = 1/6$.

$$\textcircled{1} \mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0} (1/6)^0 (1 - 1/6)^5 = (5/6)^5 = 0.4019;$$

$$\textcircled{2} \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0.4019 = 0.5981;$$

$$\textcircled{3} \mathbb{P}(X = 4) = \binom{5}{4} (1/6)^4 (1 - 1/6)^1 = \frac{25}{6} (1/6)^4 = 0.0032.$$

Esercizio 5



Assumendo che la probabilita' che nasca un maschio sia $1/2$, trovate la probabilita' che in una famiglia con 4 figli ci sia

- 1 almeno un maschio;
- 2 almeno un maschio e una femmina.
- 3 Consideriamo ora 4000 famiglie con 4 figli. Quante ci si aspetterebbe che abbiano almeno un maschio e una femmina?

Soluzione es.5

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di figli maschi nella famiglia con 4 figli. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri $n = 4$ e $p = 1/2$.

1) $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) =$

$$1 - \binom{4}{0} (1/2)^0 (1 - 1/2)^4 = 15/16 = 0.9375$$

2) $\mathbb{P}(\text{almeno un maschio e una femmina}) = 1 - \mathbb{P}(\text{nessun maschio}) - \mathbb{P}(\text{nessuna femmina}) = 1 - (1/2)^4 - (1/2)^4 = 7/8$

Soluzione es.5

- 3) Sia Z la variabile aleatoria che indica il numero di famiglie con almeno un maschio e una femmina fra le 4000 considerate. La probabilità di successo p , come ottenuto nel punto precedente è pari a $7/8$. La v.a. Z ha una distribuzione binomiale con parametri $n = 4000$ e $p = 7/8$. Perciò il numero atteso di famiglie con almeno 1 maschio e una femmina è dato da:

$$E(Z) = np = 4000(7/8) = 3500$$

Esercizio 6

Se il 20% dei bulloni prodotti da una certa macchina e' difettoso, determinate la probabilita' che, su 4 bulloni scelti a caso

- 1 uno sia difettoso;
- 2 zero siano difettosi;
- 3 al massimo 2 siano difettosi.
- 4 Trovare la media e lo scarto quadratico medio della distribuzione dei bulloni difettosi su un totale di 400 bulloni.

Soluzione es.6

Sia X la v.a. che indica il numero di bulloni difettosi fra i 4 considerati ed ha una distribuzione binomiale con parametri $n = 4$ e $p = 0.2$.

$$1) \mathbb{P}(X = 1) = \binom{4}{1} (0.2)^1 (1 - 0.2)^3 = 0.4096;$$

$$2) \mathbb{P}(X = 0) = \binom{4}{0} (0.2)^0 (1 - 0.2)^4 = 0.4096;$$

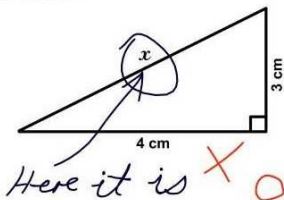
$$3) \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \\ 0.4096 + 0.4096 + \binom{4}{2} (0.2)^2 (1 - 0.2)^2 = \\ 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 = 0.9728;$$

Soluzione es.6

- 4) Sia Z la v.a. che indica il numero di bulloni difettosi su un totale di 400, e quindi Z ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 400$ e $p = 0.2$. Perciò abbiamo che la media è pari a $E(Z) = np = 400(0.2) = 80$ e lo scarto quadratico medio è dato da
- $$\sigma(Z) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400(0.2)(0.8)} = 8.$$

Esercizio 7

3. Find x .



Durante un esame a risposta multipla con 5 domande e 3 possibili risposte per ogni domanda:

- 1 quale e' la probabilita' che uno studente azzecchi almeno 4 risposte semplicemente rispondendo a caso?
- 2 Quale e' il numero medio di risposte azzeccate?

Soluzione es.7

Sia X la v.a. che indica il numero di risposte azzeccate fra le 5 domande dell'esame; X ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 5$ e $p = 1/3$.

① $\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) = 0.04527$

② Il numero medio di risposte azzeccate è dato da
 $E(X) = np = 5(1/3) = 5/3.$

Esercizio 8



La probabilita' di laurearsi di uno studente che entra nell'Universita' e' 0.4. Determinate la probabilita' che, su 5 studenti

- ① nessuno
- ② uno
- ③ almeno uno riesca a laurearsi

Soluzione es.8

Sia X la v.a. che indica il numero di studenti che riescono a laurearsi su 5 studenti. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri $n = 5$ e $p = 0.4$.

$$\textcircled{1} \mathbb{P}(X = 0) = (0.6)^5 = 0.07776$$

$$\textcircled{2} \mathbb{P}(X = 1) = 5(0.4)(0.6)^4 = 0.2592$$

$$\textcircled{3} \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.92224$$

Esercizio 9

Un passeggero qualsiasi ha una probabilit  p di non presentarsi all'imbarco, pertanto una compagnia aerea accetta N prenotazioni per un aereo con capienza n ($n \leq N$). Qual   la probabilit  che almeno un passeggero con regolare prenotazione resti a terra? Supponendo che $p = 1/10$, tale evento   pi  probabile nel caso $N = 22$, $n = 20$ oppure $N = 11$, $n = 10$?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Soluzione es.9

Sia p la probabilità che un passeggero non si presenti (i passeggeri sono considerati indipendenti), sia n la capienza dell' aereo ed N il numero delle prenotazioni. Il numero di passeggeri presenti $K \sim \text{Bin}(N, 1 - p)$, pertanto

$$\mathbb{P}(K > n) = \sum_{i=n+1}^N \binom{N}{i} p^{N-i} (1-p)^i.$$

Se $n = 20$, $N = 22$ e $p = 1/10$ si ha

$$p_1 := \mathbb{P}(K > 20) = \frac{1}{10^{22}} \left(22 \cdot 9^{21} + 9^{22} \right)$$

Soluzione es.9

mentre se $n = 10$, $N = 11$ e $p = 1/10$ si ha

$$p_2 := \mathbb{P}(K > 10) = \frac{9^{11}}{10^{11}}$$

ed infine

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{11}{5} \left(\frac{9}{10} \right)^{10} + \left(\frac{9}{10} \right)^{11} > 1.$$

Esercizio 10

Un processo di lavorazione fabbrica fusibili che dovrebbero avere una percentuale di pezzi difettosi non superiore a 1%. Il controllo si fa provando 10 fusibili a caso tra quelli prodotti e se anche solo uno di essi risulta difettoso, si ferma la produzione e si procede alla verifica dell'impianto.

- 1 Se la probabilità di produrre un pezzo difettoso fosse esattamente 0.01, quale sarebbe la probabilità di fermare l'impianto dopo un controllo?
- 2 Quanti fusibili devono essere controllati affinché la probabilità di fermare l'impianto sia pari a 0.95 nell'ipotesi che la percentuale di pezzi difettosi sia 10%?

Soluzione es.10

Si N_n il numero di fusibili difettosi tra n presi a caso (indipendenti tra loro); $N_n \sim \text{Bin}(n, p)$ (il cui valore medio, ricordiamo, è np).

1

$$\mathbb{P}(N_{10} = 0) = 1 - 0.99^{10} \approx 0.0962.$$

2 Cerchiamo n tale che $\mathbb{P}(N_n > 0) \geq 0.95$ quando $p = 0.1$ pertanto

$$1 - (1 - p)^n > 0.95 \iff n \geq \left\lceil \frac{\log(0.05)}{\log(0.9)} \right\rceil =]28.43[= 29.$$

Esercizio 11



Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Un test si compone di n domande ciascuna con k risposte (di cui solo una giusta).

Qual è la probabilità che uno studente, rispondendo a caso ottenga i risposte esatte?

Almeno i risposte esatte?

Qual è la media di risposte esatte?

Supponendo che per avere la sufficienza bastino i_0 risposte esatte, qual è il valore atteso della percentuale di studenti che passano l'esame se tutti rispondono a caso?

Dare i risultati numerici nel caso $n = 10$, $k = 4$ e $i \in \{1, 6\}$.

Soluzione es.11

Sia

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{se la risposta } i\text{-esima è esatta} \\ 0 & \text{se la risposta } i\text{-esima è sbagliata} \end{cases}$$

sono variabili Bernoulliane i.i.d. di parametro $1/k$; la variabile $S := \sum_{i=1}^n x_i$ che conta le risposte esatte ha una distribuzione $\text{Bin}(n, 1/k)$ da cui

$$\mathbb{P}(S = i) = \binom{n}{i} \frac{(k-1)^{n-i}}{k^n},$$

$$\mathbb{P}(S \geq i) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \frac{(k-1)^{n-j}}{k^n}.$$

Soluzione es.11

Inoltre se definiamo S_1, \dots, S_N il numero di risposte date da N studenti (non importa che siano indipendenti, basta che siano identicamente distribuite ed in questo caso lo sono in quanto tutte binomiali con gli stessi parametri) si ha che il valore atteso della percentuale di studenti che passano l'esame è

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{S_i \geq i_0}}{N}\right) &= \sum_{i=1}^N \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_i \geq i_0})}{N} = n\mathbb{P}(S \geq i_0) \\ &= \sum_{j=i_0}^n \binom{n}{j} \frac{(k-1)^j}{k^n}.\end{aligned}$$

Soluzione es.11

I risultati numerici sono: nel caso $n = 10$, $k = 4$ ed $i_0 = 1$

$$\mathbb{P}(S = 1) = 10 \frac{3^9}{4^{10}} \approx 0.1877$$

$$\mathbb{P}(S \geq 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0.9437$$

$$\mathbb{E} \left(\frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{S_i \geq i_0}}{N} \right) \approx 0.9437,$$

nel caso $n = 10$, $k = 4$ ed $i_0 = 6$

$$\mathbb{P}(S = 6) = \binom{10}{6} \frac{3^4}{4^{10}} \approx 0.016222$$

$$\mathbb{P}(S \geq 6) \approx 0.0197$$

$$\mathbb{E} \left(\frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{S_i \geq i_0}}{N} \right) \approx 0.0197.$$

Esercizio 12

Siano X_1, X_2 due variabili indipendenti di legge rispettivamente $\mathcal{B}(n, p)$ e $\mathcal{B}(m, p)$; sia inoltre X_3 una variabile di legge $\mathcal{B}(n + m, p)$.

- 1 Calcolare $\mathbb{P}(\{X_1 > 0\} \cup \{X_2 > 0\})$.
- 2 Calcolare $\mathbb{P}(X_3 > 0)$.

Soluzione es.12

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Osserviamo che, essendo le variabili non negative, $\{X_1 > 0\} \cup \{X_2 > 0\} = \{X_1 + X_2 > 0\}$. Ciò è dovuto al fatto che $X_1 + X_2 > 0$ se e solo se almeno una delle due disuguaglianze $X_1 > 0$ e $X_2 > 0$ è verificata.

Osserviamo inoltre che quando due variabili sono indipendenti la legge della variabile somma dipende solo dalla legge delle due variabili (perché la legge congiunta è la legge prodotto). Quindi possiamo assumere che $X_1 = \sum_{i=1}^n Z_i$ e $X_2 = \sum_{i=1}^m Z_{n+i}$ dove $\{Z_i\}_i$ è una famiglia di variabili indipendenti con legge $\mathcal{B}(p)$. Di conseguenza $X_1 + X_2 = \sum_{i=1}^{n+m} Z_i \sim \mathcal{B}(n+m, p)$ e la risposta alle due domande è la stessa.

Soluzione es.12

Anche ignorando la precedente osservazione, utilizziamo comunque l'uguaglianza

$$\{X_1 > 0\} \cup \{X_2 > 0\} = \{X_1 + X_2 > 0\}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X_1 > 0\} \cup \{X_2 > 0\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0) \\ &= 1 - (1 - p)^n(1 - p)^m \\ &= 1 - (1 - p)^{n+m} = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_3 > 0).\end{aligned}$$