

Esercizio 1

Si consideri la seguente funzione reale, dipendente dal parametro reale $k \geq 0$,

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x) & x \in [0, k] \\ 0 & x \notin [0, k] \end{cases}$$

- 1 Calcolare k affinché la funzione data sia una densità di una variabile aleatoria continua (sia essa X).
- 2 Calcolare la funzione di ripartizione di X .
- 3 Calcolare il valore atteso di X .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

- 1) La condizione $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ è equivalente a
- $$1 = \int_0^k \sin(x) dx = 1 - \cos(k) \text{ cioè, sotto l'ipotesi } k \geq 0,$$
- $k = (i + 1/2)\pi$ con $i \in \mathbb{N}$. Ma poiché f non può essere negativa in alcun intervallo aperto, si ha che $k = \pi/2$.

Soluzione es.1

2)

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \cos(t) & t \in (0, \pi/2) \\ 1 & t \geq \pi/2. \end{cases}$$

3) Il valore atteso

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx = \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx \\ &= -x \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} = 1 \end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 2

Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} c \log(x), & \text{per } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{per } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

- 1 Determinare i valori di $c \in \mathbb{R}$ che rendono f una funzione di densità. Sia X una variabile continua di legge f ; calcolare media e varianza di X .
- 2 Se $\{X_i\}_{i=1}^{40}$ sono variabili indipendenti e di legge f , calcolare $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \geq 9\right)$.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Soluzione es.2

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

1) Le condizioni necessarie e sufficienti sono

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \\ f \geq 0. \end{cases}$$

In questo caso essendo la funzione a segno costante, la prima condizione implica la seconda quindi, integrando per parti,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = c \int_0^1 \log(x)dx = cx(\log(x) - 1)|_0^1 = -c$$

da cui $c = -1$.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

1) Inoltre

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = - \int_0^1 x \log(x)dx \\ &= x^2(1/2 - \log(x))/2 \Big|_0^1 = 1/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = - \int_0^1 x^2 \log(x)dx \\ &= x^3(1/3 - \log(x))/3 \Big|_0^1 = 1/9 \end{aligned}$$

da cui

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7/144.$$

Soluzione es.2

2) Utilizzando il TLC

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \geq 9\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{40} X_i - 40/4}{\sqrt{40 \cdot 7/144}} \geq \frac{9 - 40/4}{\sqrt{40 \cdot 7/144}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{70}}\right) \approx \Phi(0.7171) \\ &\approx 0.7634.\end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 3

Si consideri la seguente famiglia di funzioni dipendenti da un parametro

$$f_c(x) := \begin{cases} c + x & x \in [0, 1]; \\ 3x^2/2 - c & x \in [-1, 0) \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

- 1 Determinare tutti i valori di $c \in \mathbb{R}$ tali che f_c sia una funzione di densità di probabilità.
- 2 Detta X una variabile continua con densità f_c (dove c soddisfa il punto precedente) si calcolino il valore atteso e la varianza di X .
- 3 Calcolare $\mathbb{P}(|X| > 1/2)$.

Soluzione es.3

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

- 1) La prima condizione $\int_{\mathbb{R}} f_c(x)dx$ è sempre soddisfatta, infatti

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_c(x)dx &= \int_0^1 (c+x)dx + \int_{-1}^0 (3x^2/2 - c)dx \\ &= (x^2/2 + cx)|_0^1 + (x^3/2 - cx)|_{-1}^0 = 1.\end{aligned}$$

La seconda condizione, $f_c(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ equivale a $c = 0$. Pertanto la condizione richiesta è $c = 0$.

Soluzione es.3

2) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f_0(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_{-1}^0 3x^3/2 dx \\ &= 1/3 - 3/8 = -1/24 \approx -0.041666\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_0(x) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_{-1}^0 3x^4/2 dx \\ &= 1/4 + 3/10 = 11/20 = 0.55,\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 11/20 - 1/24^2 \\ &= 0.54826.\end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Soluzione es.3

3) Si ha

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(|X| > 1/2) &= \mathbb{P}(X > 1/2) + \mathbb{P}(X < -1/2) \\
 &= \int_{1/2}^1 f_0(x)dx + \int_{-1}^{-1/2} f_0(x)dx \\
 &= \int_{1/2}^1 xdx + \int_{-1}^{-1/2} 3x^2/2dx \\
 &= 1/2 - 1/8 + 1/2 - 1/16 = 13/16 \\
 &= 0.8125.
 \end{aligned}$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

- 1 Determinare $c \in \mathbb{R}$ tale che f sia una funzione di densità.
- 2 Esistono il valore atteso e la varianza di X ? Se sì, calcolarli.

Soluzione es.4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

① $f \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^2} dx = \left(-\frac{c}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} = c$. Di conseguenza, è necessario e sufficiente che $c = 1$.

② Il valore atteso non è finito

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty.$$

Esercizio 5

La funzione di densità del tempo (in ore) di rottura di una componente elettronica sia data da

$$f(x) = \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}}, \text{ per } x > 0.$$

- ① Determinare la probabilità che tale componente duri più di 3000 ore prima di rompersi.
- ② Determinare la probabilità che tale componente si rompa nell'intervallo di tempo tra 1000 e 2000 ore.
- ③ Determinare la probabilità che tale componente si rompa prima di 1000 ore.
- ④ Determinare il numero di ore in cui con probabilità pari al 10% il componente si è rotto.

Soluzione es.5

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

$$\textcircled{1} P(X > 3000) = \int_{3000}^{+\infty} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = \left(-e^{-\frac{x}{1000}} \right) \Big|_{3000}^{+\infty} = e^{-3}$$

$$\textcircled{2} P(1000 < X < 2000) = \int_{1000}^{2000} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = -e^{-2} + e^{-1}$$

$$\textcircled{3} P(X < 1000) = \dots = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\textcircled{4} P(X \leq y) = \int_0^y \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = -e^{-y/1000} + 1 = 0.1$$

allora $y = -1000 \ln(0.9) \approx 105.36$.

Esercizio 6

Sia

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2, \text{ per } -1 < x < 1.$$

Determinare:

- 1 $\mathbb{P}(X > 0)$
- 2 $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2})$
- 3 $\mathbb{P}(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(|X| \leq \frac{1}{2})$ e $\mathbb{P}(|X| \geq \frac{1}{2})$
- 4 $\mathbb{P}(X < -2)$
- 5 $\mathbb{P}(X < 0 \text{ oppure } X > -\frac{1}{2})$
- 6 il valore $y \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{P}(X > y) = 0.05$

Soluzione es.6

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

$$\textcircled{1} \mathbb{P}(X > 0) = \int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{x^3}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \mathbb{P}(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \left(\frac{x^3}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{7}{16}$$

$$\textcircled{3} P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(|X| \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

$$\textcircled{4} \mathbb{P}(|X| \geq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(X \leq -\frac{1}{2} \text{ oppure } X \geq \frac{1}{2}) = 1 - \mathbb{P}(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$$

$$\textcircled{5} \mathbb{P}(X < -2) = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \mathbb{P}(X < 0 \text{ oppure } X > -\frac{1}{2}) &= \\ \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X > -\frac{1}{2}) - \mathbb{P}(-\frac{1}{2} < X < 0) &= \\ = \frac{1}{2} + \frac{9}{16} - \frac{1}{16} &= 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} y \text{ deve risolvere: } 1 - \frac{y^3}{2} = 0.1. \text{ Si ottiene } y = 0.965$$