

## Esercizio 1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

L'azienda di materiale elettronico *Cortocircuito* produce circuiti stampati. Viene avanzata l'ipotesi che la v.a.  $X$  che descrive il numero di difetti presentati dai circuiti segua una distribuzione di Poisson. Per verificare tale ipotesi si estrae un campione di 60 circuiti e, per ciascuno di essi, si osserva il numero di difetti che presenta. Il risultato è riassunto nella seguente tabella:

Numero difetti	Frequenza osservata
0	32
1	15
2	9
$\geq 3$	4

In base a questi dati, si può ritenere al 5% che  $X$  segua una legge di Poisson? Com'è definito il p-value del test? Cosa possiamo dire circa il suo valore?

## Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Stimiamo il parametro  $\lambda$  della legge di Poisson utilizzando la media campionaria che, come è noto è uno stimatore non distorto e consistente; pertanto, essendo l'ampiezza del campione  $n = 60$ , si ha

$$\lambda = \frac{32 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 4 \cdot 3}{60} = 0.75.$$

Per effettuare il test di adattamento si costruiscono i valori teorici di frequenza assoluta della variabile  $X$  utilizzando la distribuzione di Poisson  $\mathcal{P}(0.75)$  come in tabella (si ricordi che  $\mathbb{P}(X = i) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^i}{i!}$ ):

## Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Numero difetti	Freq.ass.oss.	Freq.ass.teor.
0	32	28.34
1	15	21.26
$\geq 2$	13	10.40

## Soluzione es.1

Esercizio 1

Utilizzando la statistica

$$Q = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{(n \cdot p_i - F_i)^2}{n \cdot p_i} \approx Y \sim \chi^2(N_c - 1 - r)$$

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

dove  $N_c = 3$  è il numero delle classi,  $n \cdot p_i$  sono le frequenze assolute teoriche riassunte nella precedente tabella,  $F_i$  sono le frequenze assolute osservate e  $r = 1$  è il numero di parametri della distribuzione stimati dai dati e considerando come ipotesi nulla

$H_0$ : le osservazioni provengono dalla distribuzione teorizzata

si ottiene  $Q = 2.9659$ .

## Soluzione es.1

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

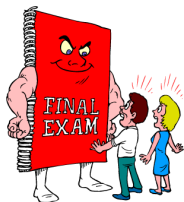
Esercizio 13

Esercizio 14

Ricordiamo che l'ipotesi nulla viene accettata ad un livello di significatività  $\alpha$  se e solo se

$Q < \chi^2_{1-\alpha}(N_c - 1 - r) = \chi^2_{0.95}(1) = 3.841$ . Quindi l'ipotesi nulla viene accettata al 5%. Alternativamente, il p-value del test è  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(1)}(2.9659) = 0.0850$ , un valore non molto alto che comporta la forte dipendenza dell'esito del test dalla scelta di  $\alpha$ .

## Esercizio 2



Nella sessione di esami 1999-2000 gli studenti hanno ottenuto punteggi finali che sono stati raccolti in quattro categorie **D**, **C**, **B** e **A** rispettivamente con frequenza 40%, 30%, 20% e 10%. In un campione di 2500 studenti che hanno sostenuto lo stesso esame nella sessione 2001-2002 si sono osservate le seguenti frequenze:

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

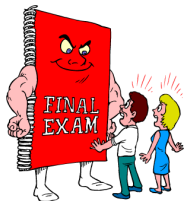
Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 2



Punteggio	Frequenza osservata
D	1170
C	585
B	405
A	340

Al livello di significatività dell'1% si può concludere che questo gruppo sia omogeneo all'insieme degli studenti dell'anno precedente?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.2

Calcoliamo la frequenza attesa per un campione di ampiezza  $n = 2500$

Punteggio	Frequenza osservata	Frequenza attesa
D	1170	1000
C	585	750
B	405	500
A	340	250

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14



## Soluzione es.2

Utilizzando la statistica

$$Q = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{(n \cdot p_i - F_i)^2}{n \cdot p_i} \approx Y \sim \chi^2(N_c - 1)$$

dove  $N_c = 4$  è il numero delle classi,  $n \cdot p_i$  sono le frequenze assolute attese,  $F_i$  sono le frequenze assolute osservate e considerando come ipotesi nulla

$H_0$ : le osservazioni provengono dalla distribuzione teorizzata

si ottiene  $Q = 28.9 + 36.3 + 18.05 + 32.4 = 115.65$ .

## Soluzione es.2

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Ricordiamo che l'ipotesi nulla viene accettata ad un livello di significatività  $\alpha$  se e solo se

$Q < \chi^2_{1-\alpha}(N_c - 1) = \chi^2_{0.99}(3) = 11.34$ . Quindi l'ipotesi nulla viene rifiutata al livello 1%. Alternativamente, il p-value del test è  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(3)}(115.65) \approx 0$  per cui l'ipotesi nulla è ragionevolmente rifiutabile.

## Esercizio 3



Si suppone che la v.a.  $X$  che misura il tempo medio di vita (in mesi) delle lampadine della ditta *Bulbo Incandescente* segua una legge esponenziale. Su un campione di 100 lampadine si sono osservate le seguenti durate

	Frequenza osservata
$X \leq 1$	0.39
$1 < X \leq 2$	0.24
$2 < X \leq 3$	0.12
$3 < X \leq 5$	0.16
$5 < X \leq 10$	0.09

## Esercizio 3



Si stimi il parametro  $\lambda$  della legge e si appronti un test adatto a valutare l'adattamento della legge trovata.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.3

Incominciamo con lo stimare il parametro  $\lambda$  dell'esponenziale. Uno stimatore non distorto e consistente per il parametro  $\lambda$  è  $(n-1)/\sum_{i=1}^n x_i$  (per  $n > 1$ ). Utilizzando tale stimatore e approssimando  $\sum_{i=1}^n x_i$  con  $n \sum_{i=1}^{N_c} \bar{c}_j f_j$  dove  $f_j$  è la frequenza relativa della classe  $j$ -esima e  $\bar{c}_j$  è la media uniforme della classe  $j$ -esima si ha

$$\lambda = \frac{0.99}{0.39 \cdot 0.5 + 0.24 \cdot 1.5 + 0.12 \cdot 2.5 + 0.16 \cdot 4 + 0.09 \cdot 7.5} \approx 0.461.$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.3

Per effettuare il test di adattamento si costruiscono i valori teorici di frequenza utilizzando la distribuzione esponenziale  $\exp(0.461)$  come in tabella:

	Frequenza teorica
$X \leq 1$	$1 - \exp(-0.461) \approx 0.3693$
$1 < X \leq 2$	$\exp(-0.461) - \exp(-0.461 \cdot 2) \approx 0.2329$
$2 < X \leq 3$	$\exp(-0.461 \cdot 2) - \exp(-0.461 \cdot 3) \approx 0.1469$
$3 < X \leq 5$	$\exp(-0.461 \cdot 3) - \exp(-0.461 \cdot 5) \approx 0.1511$
$5 < X \leq 10$	$\exp(-0.461 \cdot 5) - \exp(-0.461 \cdot 10) \approx 0.0898$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.3

e si utilizza la seguente statistica

$$Q = n \sum_{i=1}^{N_c} \frac{(p_i - f_i)^2}{p_i} \approx Y \sim \chi^2(N_c - 1 - r)$$

dove  $N_c = 5$  è il numero delle classi,  $p_i$  sono le frequenze relative teoriche riassunte nella precedente tabella,  $f_i$  sono le frequenze relative osservate,  $r$  è il numero di parametri della distribuzione stimati dai dati (in questo caso  $r = 1$ ) ed infine  $n = 100$  è l'ampiezza del campione.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.3

L'ipotesi nulla

$H_0$ : le osservazioni provengono dalla distribuzione teorizzata

viene accettata ad un livello di significatività  $\alpha$  se e solo se  $Q < \chi^2_{1-\alpha}(N_c - 1 - r)$  (dove  $\chi^2_\alpha(k)$  è la funzione quantile della distribuzione  $\chi^2$  con  $k$  gradi di libertà in calcolata in corrispondenza del valore  $\alpha$ ). Alternativamente, il p-value del test è  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(N_c-1-r)}(Q)$ . Utilizzando i dati del problema  $Q = 0.6732$  e  $\bar{\alpha} = 0.8795$ . Il test è quindi accettato al livello di significatività del 10%.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14



## Esercizio 4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14



Gregor Johann Mendel ( 20 luglio 1822 à 6 gennaio 1884)

Nel 1856 il biologo Gregor Mendel condusse un esperimento di ibridazione sui piselli. Secondo la teoria sulla trasmissione dei caratteri ereditari da lui stesso proposta, l'esperimento avrebbe dovuto produrre piselli del tipo **RY**, **RG**, **WY** e **WG** rispettivamente con frequenze relative  $9/16$ ,  $3/16$ ,  $3/16$  e  $1/16$ . (R=round, W=wrinkle, Y=yellow, G=green).

## Esercizio 4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

**Esercizio 4**

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14



Gregor Johann Mendel (20 luglio 1822 à 6 gennaio 1884)

I risultati dell'esperimento furono:

Piselli	RY	RG	WY	WG
Frequenze	315	108	101	32

Questi risultati confermano la teoria di Mendel?

## Soluzione es.4

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Allo scopo di verificare l'adattamento dei dati reali a quelli teorici calcoliamo le frequenze relative osservate e testiamo l'ipotesi nulla

$H_0$ : i dati provengono dalla legge teorizzata da Mendel.

L'ampiezza del campione è

$n = 315 + 108 + 101 + 32 = 556$  quindi

Piselli	RY	RG	WY	WG
Fr.ass.oss.	315	108	101	32
Fr.rel.oss.	315/556	108/556	101/556	32/556
Fr.rel.teor.	9/16	3/16	3/16	1/16

## Soluzione es.4

da cui

$$Q = n \sum_{i=1}^{N_c} \frac{(p_i - f_i)^2}{p_i} = 0.47.$$

Il p-value del test è pertanto  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(3)}(0.47) \approx 0.9254$ , quindi la teoria di Mendel è molto plausibile.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 5



Nel paese di *Crazyland* vigono leggi molto peculiari. La premiata ditta di fuochi di artificio *Miccia Corta* afferma che il numero di settimane che trascorrono tra un incidente in fabbrica ed il successivo è a norma di legge (cioè segue una legge esponenziale con media 2). Un ispettore per la sicurezza sul lavoro raccoglie i dati relativi a 100 incidenti e li riassume nella seguente tabella:

- Esercizio 1
- Esercizio 2
- Esercizio 3
- Esercizio 4
- Esercizio 5**
- Esercizio 6
- Esercizio 7
- Esercizio 8
- Esercizio 9
- Esercizio 10
- Esercizio 11
- Esercizio 12
- Esercizio 13
- Esercizio 14

## Esercizio 5



Tempo interincidente $X$	Frequenze
$X < 1$	35
$1 \leq X < 2$	19
$2 \leq X < 3$	18
$3 \leq X < 4$	11
$4 \leq X$	17

Può l'ispettore confermare, con un livello di significatività del 5%, l'affermazione di regolarità avanzata dal titolare dell'azienda.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.5

Il lavoro dell'ispettore è quello di svolgere un test di adattamento sugli  $n = 100$  dati provenienti dalla variabile  $X$  (tempo che intercorre tra un incidente ed il successivo); l'ipotesi nulla è

$H_0$ : per la legge di  $X$  vale  $\mathcal{L}(X) = \exp(0.5)$ .

Ricordando che la funzione di ripartizione della legge  $\exp(\lambda)$  è  $F(x) = (1 - \exp(-x\lambda))\mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$  calcoliamo i valori di frequenza assoluta teorici

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.5

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Tempo $X$	$X < 1$	$1 \leq X < 2$	$2 \leq X < 3$	$3 \leq X < 4$	$4 \leq X$
Fr.ass.oss.	35	19	18	11	17
Fr.ass.teor.	39.35	23.87	14.47	8.78	13.53

Utilizziamo la statistica

$$Q = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{(n \cdot p_i - F_i)^2}{n \cdot p_i} = 3.7869$$



## Soluzione es.5

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

ed otteniamo il p-value del test è

$\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(4)}(3.7869) = 0.4356$ , pertanto l'ipotesi nulla è accettata ad un livello di significatività del 5% ed la ditta *Miccia Corta* viene considerata in regola.

Alternativamente si confronta  $\chi^2_{0.95}(4) = 9.4877$  con  $Q$ ; essendo  $Q < \chi^2_{0.95}(4)$  non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla.

## Esercizio 6

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14



Horseshoe Bend, Colorado River, Page (AZ), USA

Nel bacino del fiume *Fast-and-Furious creek* l'irrigazione comincia il 15 Aprile; un tecnico è interessato alla probabilità di pioggia durante la prima settimana di tale periodo. Dai dati ricavati negli ultimi 100 anni nell'area di interesse, si è ricavata la seguente distribuzione di giorni piovosi per la settimana in questione:

## Esercizio 6

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14



Horseshoe Bend, Colorado River, Page (AZ), USA

Giorni piovosi	0	1	2	3, 4, 5, 6, 7	Totale
Frequenza assoluta	57	30	9	4	100

Sulla base dei dati raccolti è plausibile, ad un livello di significatività del 3%, che il numero dei giorni piovosi segua una legge binomiale  $\mathcal{B}(7, 0.1)$ ?

## Soluzione es.6

Si tratta di testare l'adattamento dei dati ad una legge Binomiale di parametri noti. Osserviamo immediatamente che, se chiamiamo  $X$  la variabile aleatoria, allora  $\mathbb{P}(X = 0) = 0.4783$ ,  $\mathbb{P}(X = 1) = 0.372$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = 0.124$  e  $\mathbb{P}(X \geq 3) = 0.0257$ , pertanto

Giorni piovosi	0	1	2	3, 4, 5, 6, 7
Freq.ass.oss.	57	30	9	4
Freq.ass.teor.	47.83	37.2	12.4	2.57

## Soluzione es.6

Utilizziamo la statistica

$$Q = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{(n \cdot p_i - F_i)^2}{n \cdot p_i} \approx Y \sim \chi^2(N_c - 1 - r)$$

dove  $N_c = 4$  è il numero delle classi,  $n \cdot p_i$  sono le frequenze assolute teoriche,  $F_i$  sono le frequenze assolute osservate,  $r = 0$  è il numero di parametri della distribuzione stimati dai dati ed infine  $n = 100$  è l'ampiezza del campione considerato. Formuliamo l'ipotesi nulla

$H_0$ : le osservazioni provengono dalla distribuzione teorizzata

ottenendo  $Q = 4.8796$  da cui il p-value del test è  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(3)}(4.8796) = 0.1808$ ; l'ipotesi nulla è accettata ad un livello di significatività del 5%.

## Esercizio 7



Arturo Cecato, altresì noto agli amici come *Killer*, è un giocatore di freccette accanito, ma piuttosto incapace e pericoloso. In una serata tipica (10 partite) il numero di persone colpite dai suoi tiri fuori bersaglio è notevole.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 7



La seguente tabella riassume le sue “imprese” relative a 75 serate

Persone colpite	1	2	3	4	5	6	7	8
Frequenza assoluta	1	11	8	13	11	12	10	9

È plausibile assumere che il numero di persone colpite segua una legge di Poisson di parametro 6? In caso negativo, possiamo concludere che la legge non sia una Poisson?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.7

Dovendo testare l'adattamento dei dati ad una legge di Poisson di parametro noto procediamo immediatamente con il calcolo dei valori teorici di frequenza assoluta della variabile  $X$  utilizzando la distribuzione di Poisson  $\mathcal{P}(6)$  (si ricordi che  $\mathbb{P}(X = i) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^i}{i!}$ ); per ottenere una buona stima è necessario accorpare i dati in maniera tale che la frequenza di ogni classe non sia inferiore a 5:

Persone colpite	Freq.ass.oss.	Freq.ass.teor.
$\leq 2$	12	4.6477
3	8	6.6926
4	13	10.0389
5	11	12.0467
6	12	12.0467
7	10	10.3258
$\geq 8$	9	19.2015

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14



## Soluzione es.7

Utilizzando la statistica

$$Q = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{(n \cdot p_i - F_i)^2}{n \cdot p_i} \approx Y \sim \chi^2(N_c - 1 - r)$$

dove  $N_c = 7$  è il numero delle classi,  $n \cdot p_i$  sono le frequenze assolute teoriche,  $F_i$  sono le frequenze assolute osservate e  $r = 0$  è il numero di parametri della distribuzione stimati dai dati ed infine  $n = 75$  è l'ampiezza del campione statistico. Formuliamo al solito l'ipotesi nulla

$H_0$ : le osservazioni provengono dalla distribuzione teorizzata.

## Soluzione es.7

Con semplici calcoli si ottiene  $Q = 18.2809$  pertanto p-value del test è  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(6)}(18.2809) = 0.0056$ ; l'ipotesi nulla può essere ragionevolmente rifiutata.

Naturalmente non possiamo concludere che la legge non sia una Poisson; proviamo a stimare il parametro  $\lambda$  utilizzando la media campionaria

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 13 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 12 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 9}{75} \\ &= 4.9067\end{aligned}$$

## Soluzione es.7

Ripetiamo quindi calcoli analoghi ottenendo

Persone colpite	Freq.ass.oss.	Freq.ass.teor.
$\leq 2$	12	9.9550
3	8	10.9226
4	13	13.3985
5	11	13.1485
6	12	10.7526
7	10	7.5371
$\geq 8$	9	9.2858

da cui  $Q = 2.5233$  e  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(5)}(2.5233) \approx 0.773$ . Per cui l'adattamento alla legge è buono.

## Esercizio 8



Il signor **Ercole Maciste**, titolare della omonima ditta di martinetti idraulici, vuole analizzare la durata del modello Ercolissimo in commercio da ben 5 anni. Si analizza un campione di 100 martinetti di cui si è appena rotto l'ultimo ottenendo la seguente tabella che riporta i tempi intercorsi dalla consegna al guasto (calcolati in settimane).

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 8



Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

**Esercizio 8**

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Tempo intercorso $X$	Frequenza assoluta
$0 \leq X < 300$	55
$300 \leq X < 600$	25
$600 \leq X < 900$	10
$900 \leq X < 1200$	4
$1200 \leq X < 1500$	3
$1500 \leq X < 1800$	2
$1800 \leq X \leq 1825$	1

## Esercizio 8



È possibile affermare che il tempo di vita dell'apparecchio in questione segua una legge esponenziale? Qual è il tempo di vita medio?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

**Esercizio 8**

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.8

Stimiamo il parametro  $\lambda$  dell'esponenziale utilizzando il campione di  $n = 100$  dati a nostra disposizione. Uno stimatore non distorto e consistente per il parametro  $\lambda$  è  $(n-1)/\sum_{i=1}^n x_i$  (per  $n > 1$ ). Approssimando  $\sum_{i=1}^n x_i$  con  $\sum_{j=1}^{N_c} \bar{c}_j F_j$  dove  $F_j$  è la frequenza assoluta della classe  $j$ -esima e  $\bar{c}_j$  è la media uniforme della classe  $j$ -esima si ha

$$\lambda = \frac{99}{55 \cdot 150 + 25 \cdot 450 + 10 \cdot 750 + 4 \cdot 1050 + 3 \cdot 1350 + 2 \cdot 1650 + 1813}$$

$$\approx \frac{99}{40363} = 2.453 \cdot 10^{-3}$$

## Soluzione es.8

Per effettuare il test di adattamento si costruiscono i valori teorici di frequenza assoluta utilizzando la distribuzione esponenziale  $\exp(2.453 \cdot 10^{-3})$  come in tabella (accorpare opportunamente i dati in modo da avere  $n_i \geq 5$ ):

Tempo $X$	Fr.ass.oss.	Fr.ass.teor.
$0 \leq X < 300$	55	52.09
$300 \leq X < 600$	25	25
$600 \leq X < 900$	10	11.96
$900 \leq X$	10	11



## Soluzione es.8

Utilizziamo ora la seguente statistica

$$Q = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{(n \cdot p_i - F_i)^2}{n \cdot p_i} \approx Y \sim \chi^2(N_c - 1 - r)$$

dove  $N_c = 4$  è il numero delle classi,  $n \cdot p_i$  sono le frequenze assolute teoriche riassunte nella precedente tabella,  $F_i$  sono le frequenze assolute osservate e  $r = 1$  è il numero di parametri della distribuzione stimati dai dati.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.8

## L'ipotesi nulla

$H_0$ : le osservazioni provengono dalla distribuzione teorizzata

viene accettata ad un livello di significatività  $\alpha$  se e solo se  $Q < \chi^2_{1-\alpha}(N_c - 1 - r)$ . Alternativamente, il p-value del test è  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(N_c - 1 - r)}(Q)$ . Utilizzando i dati del problema  $Q = 0.5747$  e  $\bar{\alpha} = 0.7502$ . L'ipotesi nulla è quindi ragionevolmente accettata.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 9



Un certo protocollo per il controllo qualità classifica i termometri in quattro classi **A**, **B**, **C** e **D**. Sulla base dell'esperienza passata, i termometri della ditta "Fevertime" si distribuiscono tra le categorie secondo la seguente tabella:

Categoria	A	B	C	D
Proporzione	0.87	0.09	0.03	0.01

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 9



L'azienda produttrice sottopone un nuovo lotto di 1336 termometri ad un controllo che da il seguente risultato:

Categoria	A	B	C	D
Frequenza assoluta	1188	91	47	10

Si può affermare che il nuovo lotto è conforme agli standard passati?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.9

Si consideri la seguente tabella

Categoria	A	B	C	D
Fr.ass. $na$	1188	91	47	10
Fr.rel.teor.	0.87	0.09	0.03	0.01
Fr.ass.teor. $nt$	1162.32	120.24	40.08	13.36
$(na - nt)^2 / nt$	0.5674	7.1106	1.1948	0.845

da cui  $Q = 9.718$ . Poichè asintoticamente la distribuzione di  $Q$  è  $\chi^2(3)$  si calcola il p-value

$\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(3)}(9.718) = 0.0211$ , pertanto concludiamo che ragionevolmente il nuovo lotto è difforme dai precedenti.

## Esercizio 10



La ditta farmaceutica *Pasticche&Vaccini* sta conducendo uno studio su un ceppo batterico mutante in grado di essere utilizzato per la produzione di nuovi medicinali. La particolarità di questo batterio è che la colonia muta (con il ritmo di una volta ogni 24 ore) le sue caratteristiche. In particolare si suppone che possa assumere 3 “forme” differenti A, B e C con probabilità

Categoria	A	B	C
Probabilità	$\lambda$	$\lambda$	$1 - 2\lambda$

dove  $\lambda \in (0, 1/2)$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 10



Per verificare tale ipotesi e cercare un valore opportuno per  $\lambda$  si testa la colonia nei primi 24 giorni di vita e si ottiene la seguente tabella

Categoria	A	B	C
Frequenza assoluta	6	8	10

Ci si chiede se esiste un valore di  $\lambda$  per cui si possa accettare la legge teorica ad un livello di significatività del 5%. Quale valore di  $\lambda$  rende migliore l'adattamento?

## Esercizio 10



Cosa si potrebbe concludere nel caso in cui l'ampiezza del campione fosse 2400 così suddivisa

Categoria	A	B	C
Frequenza assoluta	600	800	1000

ad un livello di significatività del 5%?

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14



## Soluzione es.10

Per verificare l'adattamento calcoliamo

$$Q = n \sum_{i \in J} \frac{(p_i - f_i)^2}{p_i}$$

e quindi il p-value  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(|J|-1-r)}(Q)$ . Per le note proprietà di monotonia delle funzioni di ripartizione, massimizzare il p-value equivale a minimizzare  $Q$ .

Supponendo che  $p_i = p_i(\underline{\lambda})$  (dove  $\underline{\lambda} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  è un vettore di parametri) siano funzioni derivabili e strattamente positive, allora il minimo di  $Q$  nell'aperto  $\Omega$  se esiste deve essere soluzione di  $JQ = 0$  dove, dal teorema di derivazione della funzione composta,

$$JQ(\underline{\lambda}) = n \sum_{i \in J} \left( 1 - \frac{f_i^2}{p_i^2(\underline{\lambda})} \right) Jp_i(\underline{\lambda}).$$

## Soluzione es.10

Nel nostro caso, posto  $f_1 = 6/24 = 0.25$ ,  $f_2 = 8/24 = 1/3$  e  $f_3 = 10/24 = 5/12$ , si tratta di risolvere l'equazione

$$1 - \frac{f_1^2}{\lambda^2} + 1 - \frac{f_2^2}{\lambda^2} - 2\left(1 - \frac{f_3^2}{(1 - 2\lambda)^2}\right) = 0$$

con  $\lambda \in (0, 1/2)$ , la cui soluzione è  $\lambda = 1/(2 + \sqrt{(2f_3^2/(f_1^2 + f_2^2))}) \approx 0.2929$  (si vede facilmente che questa corrisponde ad un punto di minimo). Pertanto  $Q = 0.2851$  e  $\bar{\alpha} = 1 - F_{\chi^2(1)}(Q) = 0.5934$  e l'ipotesi di adattamento è accettata al 5%.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.10

Se ora l'ampiezza del campione fosse  $n = 2400$  con le stesse frequenze relative si vedrebbe immediatamente, con calcoli analoghi che  $Q = 28.51$  e  $\bar{\alpha} = 9.3153 \cdot 10^{-8}$  per cui l'ipotesi sarebbe rifiutata (per ogni  $\lambda \in (0, 1/2)$ ).

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 11

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14



Da un campione di  $n_1 := 100$  famiglie di Springfield risulta che il numero medio di figli per famiglia è  $\bar{x}_1 := 1.8$ , con una deviazione standard pari a  $s_1 := 0.6$ . La stessa indagine svolta nella vicina Shelbyville rivela un numero medio di figli pari a  $\bar{x}_2 := 1.6$  con deviazione standard  $s_2 := 0.4$  su un campione di  $n_2 := 200$  famiglie.

# Esercizio 11



Discutere l'ipotesi nulla

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

nei casi

- ① varianze supposte note,
- ② varianze incognite uguali
- ③ varianze incognite differenti.

## (1) Il test

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 =: \Delta_0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 =: \Delta_0$$

ha regione critica e  $P$ -value

$$\left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \right| > q_{1-\alpha/2}$$

$$\bar{\alpha} := 2 \left( 1 - \phi \left( \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \right| \right) \right).$$

## Soluzione es.11

- (1) Non essendo indicato nessun livello di significatività procediamo al calcolo del  $P$ -value

$$\left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \right| \approx 3.015$$

$$\bar{\alpha} := 2 \left( 1 - \phi \left( \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \right| \right) \right) \approx 0.0026$$

che suggerisce, essendo  $\bar{\alpha}$  piuttosto piccolo, un'ipotesi nulla molto poco attendibile.

## Soluzione es.11

(2) Si utilizza lo stimatore per  $\sigma^2$

$$S^2 := \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

e la regione di rifiuto e  $P$ -value

$$T := \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta_0}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$|T| > t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}$$

$$\bar{\alpha} := 2(1 - F_{T(n_1+n_2-2)}(|T|)).$$

Essendo  $T \approx 3.4317$  ed  $\bar{\alpha} \approx 6.847 \cdot 10^{-4}$  si ha che l'ipotesi nulla è poco plausibile.



## Soluzione es.11

(3) In questo caso il test ha regione di rifiuto e  $P$ -value

$$T := \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$\nu := \frac{((s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)}$$

$$|T| > t_{1-\alpha/2, \nu}$$

$$\bar{\alpha} := 2(1 - F_{T(\nu)}(|T|)).$$

Poichè  $T \approx 3.0151$ ,  $\nu \approx 144.3428$  e  $\bar{\alpha} \approx 0.003$  si ha, anche in questo caso, che l'ipotesi nulla è poco plausibile.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

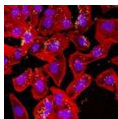
Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 12



In Lombardia negli ultimi 4 inverni sono stati registrati, durante i mesi di Novembre, Dicembre e Gennaio, i seguenti casi di meningite

99/00	13
00/01	15
01/02	20
02/03	18

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

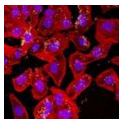
Esercizio 11

**Esercizio 12**

Esercizio 13

Esercizio 14

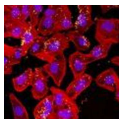
## Esercizio 12



Supponendo che il numero di abitanti sia rimasto sostanzialmente invariato in questi anni (e pari a 8.940.000) e tenendo come livello di riferimento la media dei primi 3 anni di monitoraggio, si vuole decidere se l'epidemia di quest'anno sia più preoccupante.

- Esercizio 1
- Esercizio 2
- Esercizio 3
- Esercizio 4
- Esercizio 5
- Esercizio 6
- Esercizio 7
- Esercizio 8
- Esercizio 9
- Esercizio 10
- Esercizio 11
- Esercizio 12**
- Esercizio 13
- Esercizio 14

## Esercizio 12



- 1 Si adotti il punto di vista *precauzionale*: si formuli l'ipotesi nulla adeguata e si discuta la validità dell'ipotesi con un livello di significatività del 5%.
- 2 Si adotti il punto di vista *non allarmistico*: si formuli l'ipotesi nulla adeguata, si calcoli il p-value e si discuta la validità dell'ipotesi.
- 3 Si ripeta il punto (1) utilizzando il confronto tra le medie del 2002 e del 2003 per decidere se quest'anno l'epidemia sia più virulenta.
- 4 Si studi la possibilità che la media dei primi 3 anni sia uguale a quella dell'ultimo anno supponendo che nell'ultimo anno non siano stati registrati 10 casi (e che quindi in totale siano 28).

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.12

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

- (1) La media campionaria dei primi tre anni (assunta come vera) sul campione di ampiezza  $n = 8940000$  è  $p_0 := (13 + 15 + 20)/(3n) \approx 1.7897 \cdot 10^{-6}$ , mentre  $\bar{p} = 18/n \approx 2.0134 \cdot 10^{-6}$ . Il test

$$H_0 : p \geq p_0$$

$$H_1 : p < p_0$$

ha come regione critica (o regione di rifiuto) e  $P$ -value

$$\frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} < q_\alpha$$

$$\bar{\alpha} = \phi \left( \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \right).$$

Essendo  $\bar{p} > p_0$  l'ipotesi nulla non può essere rifiutata a livelli inferiori a 0.5.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

**Esercizio 12**

Esercizio 13

Esercizio 14

(1) In ogni caso si ha

$$\frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \approx 0.5$$

$$q_{0.05} \approx -1.6449$$

$$\bar{\alpha} = \phi \left( \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \right) \approx 0.6915.$$

(2) Questa volta si tratta di studiare il test

$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

che ha come regione critica e  $P$ -value

$$\frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} > q_{1-\alpha}$$

$$\bar{\alpha} = 1 - \phi \left( \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \right).$$

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

(2) Eseguendo i calcoli si ha

$$q_{0.95} \approx 1.6449$$

$$\bar{\alpha} = \phi \left( \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \right) \approx 0.3185$$

pertanto ancora non si può rifiutare l'ipotesi nulla (equivalentemente utilizzando la regione critica o il  $P$ -value).



## Soluzione es.12

(3) Si considerano  $\bar{p}_1 = 18/n$  e  $\bar{p}_2 = 20/n$  ed il test

$$H_0 : p_1 \geq p_2$$

$$H_1 : p_1 < p_2$$

che ha come regione critica (o regione di rifiuto) e  $P$ -value

$$\frac{\bar{p}_1 - p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n + p_2(1-p_2)/n}} < q_\alpha$$

$$\bar{\alpha} = 1 - \phi \left( \frac{\bar{p}_1 - p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n + p_2(1-p_2)/n}} \right).$$

## Soluzione es.12

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

(3) Eseguendo i calcoli si ha

$$\frac{\bar{p}_1 - p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n + p_2(1-p_2)/n}} \approx \frac{-2}{\sqrt{18+20}} \approx -0.3244$$

$$\bar{\alpha} = 1 - \phi \left( \frac{\bar{p}_1 - p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n + p_2(1-p_2)/n}} \right) \approx 0.3728$$

quindi non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla al livello di significatività del 5%.

## Soluzione es.12

(4) Si considerano  $n_1 := n$ ,  $n_2 := 3n$ ,

$$\bar{p}_1 = 28/n_1 \approx 3.132 \cdot 10^{-6} \text{ e}$$

$$\bar{p}_2 = (20 + 13 + 15)/n_2 \approx 1.7897 \cdot 10^{-6} \text{ ed il test}$$

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2$$

che ha come regione di accettazione e  $P$ -value

$$q_{\alpha/2} < \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n_1 + p_2(1-p_2)/n_2}} < q_{1-\alpha/2}$$

$$\bar{\alpha} = 2 \left( 1 - \phi \left( \frac{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|}{\sqrt{p_1(1-p_1)/n_1 + p_2(1-p_2)/n_2}} \right) \right).$$

(4) Eseguendo i calcoli si ha

$$\frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{p_1(1 - p_1)/n_1 + p_2(1 - p_2)/n_2}} \approx 2.0785$$

$$q_{0.975} \approx 1.9600$$

$$\bar{\alpha} \approx 0.0377$$

pertanto rifiutiamo l'ipotesi nulla al livello di significatività del 5%.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

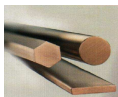
Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Esercizio 13



Per confrontare la resistenza di quattro diverse leghe di metallo (A, B, C e D) sono stati esaminati quattro campioni e su ogni unità è stata misurata la resistenza di rottura. I risultati sono contenuti nella seguente tabella.

A	B	C	D
32	30	24	30
37	31	31	29
34	40	28	28
33	37	32	33
37	38		31
	36		32

Si valuti se le leghe si possono ritenere equivalenti.

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Consideriamo l'ipotesi nulla

$$H_0: \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$$

e l'ipotesi alternativa

$$H_1: \text{almeno due medie sono diverse}$$

Calcoliamo i valori

	A	B	C	D	
$Y_{i.}$	173	212	115	183	$Y_{..} = 683$
$n_i$	5	6	4	6	$N = 21$
$\bar{Y}_{i.}$	34.6	35.33	28.75	30.5	$\bar{Y}_{..} = 32.52$

Inoltre abbiamo  $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 = 22521$  e

$$\sum_{i=1}^4 \frac{Y_{i.}^2}{n_i} = 22364.217.$$

## Soluzione es.13

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

Possiamo ora calcolare:

$$SS_E = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 = 22521 - 22364.217 = 156.783$$

$$SS_F = \sum_i n_i (\bar{Y}_{i.}^2 - \bar{Y}_{..}^2) = 22364.217 - \frac{683^2}{21} = 150.455$$

Ricordando che

$$MS_F := \frac{SS_F}{n-1}, \quad MS_E := \frac{SS_E}{\sum_{i=1}^n n_i - n}$$

(in questo caso  $n = 4$ ), possiamo ora costruire la tabella ANOVA:

## Soluzione es.13

Fonte di variabilità	SS	g.l.	MS	F
Fattore	150.455	3	50.15	5.44
Errore	156.783	17	9.22	
Tot	307.238	20		

poichè  $\alpha = 0.05$  e  $F_{0.05;3;17} = 3.2$  l'ipotesi  $H_0$  di uguaglianza fra le resistenze delle leghe va rifiutata al livello del 5% dato che  $F = 5.44 > F_{0.05;3;17} = 3.2$ .



## Esercizio 14



E' stata studiata la resistenza alla rottura di due tipi di filo di lana. Sappiamo che  $\sigma_1 = 5$  e  $\sigma_2 = 4$  psi. Per ciascun tipo di filo di lana si è costituito un campione casuale di 20 provini e si è ottenuto, rispettivamente,  $\bar{x}_1 = 88$  psi e  $\bar{x}_2 = 91$  psi.

- 1 Usando un intervallo di confidenza al 90% per la differenza delle medie della resistenza alla rottura, dire se vi è o no evidenza per affermare che la resistenza del filo di lana di tipo 2 è più alta.
- 2 Ripere il punto precedente utilizzando un intervallo di confidenza al 98.

## Soluzione es.14

Ricordiamo che la statistica test utilizzata per ipotesi sul confronto di due medie con varianze note è

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1).$$

L'intervallo di confidenza quindi è del tipo

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

In questo caso conosciamo  $n_1 = n_2 = 20$ ;  $\sigma_1 = 5$ ;  $\sigma_2 = 4$ ;  $\bar{x}_1 = 88$  e  $\bar{x}_2 = 91$ .

Esercizio 1

Esercizio 2

Esercizio 3

Esercizio 4

Esercizio 5

Esercizio 6

Esercizio 7

Esercizio 8

Esercizio 9

Esercizio 10

Esercizio 11

Esercizio 12

Esercizio 13

Esercizio 14

## Soluzione es.14

- 1 per l'intervallo di confidenza al 90%:  $\alpha = 0.1$  abbiamo  $q_{1-\alpha/2} = 1.64$ , quindi l'intervallo cercato è il seguente:

$$-5.348 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -0.652.$$

Quindi, siccome l'intervallo contiene solo valori strettamente negativi, possiamo affermare che il filo di lana di tipo 2 ha più alta resistenza media.

- 2 Per l'intervallo di confidenza al 98%:  $\alpha = 0.02$  abbiamo  $q_{1-\alpha/2} = 2.32$ , quindi l'intervallo cercato è il seguente:

$$-6.322 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 0.322$$