

# Come assegnare $\mathbb{P}$ quando $\Omega$ è discreto

## Come assegnare $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

### OSSERVAZIONE.

In questo caso basta assegnare la probabilità agli eventi elementari e saremo in grado di conoscere la probabilità di ogni evento.

**ESEMPIO.** Sia  $\Omega = \{a, b, c\}$  e  $\mathbb{P}(\{a\}) = 0.3$ ;  $\mathbb{P}(\{b\}) = 0.4$ ;  $\mathbb{P}(\{c\}) = 0.3$ .

Allora la probabilità dell'evento  $\{a, b\}$  è 0.7. (Perché?)

Dato  $\omega \in \Omega$ , spesso al posto di  $\mathbb{P}(\{\omega\})$  scriveremo  $\mathbb{P}(\omega)$ .

## Come assegnare $\mathbb{P}$ quando $\Omega$ è discreto

### Come assegnare $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

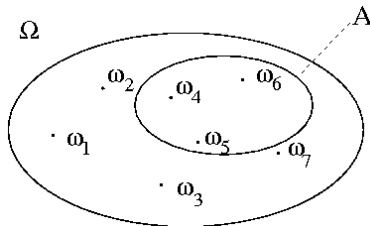
Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

Infatti se  $\Omega$  è discreto significa che i suoi elementi si possono elencare e **ogni** suo sottoinsieme  $A$  è un'unione finita (o numerabile) di elementi.

Quindi la probabilità di  $A$  è la somma delle probabilità degli elementi che lo compongono.



$$A = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \text{ quindi } \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\omega_4) + \mathbb{P}(\omega_5) + \mathbb{P}(\omega_6).$$

## Caso “classico”

Come  
assegnare  $P$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea “frequentista”

Esempi

Limiti

Ora la domanda è: come assegnare la probabilità agli eventi elementari?

Restringiamoci a un caso particolare:  $\Omega$  sia **finito e tutti i suoi elementi abbiano la stessa probabilità** (caso “classico”).

## ESEMPI.

- 1 lancio di una moneta: 2 casi (T e C), ciascuno con probabilità  $\frac{1}{2}$ .
- 2 lancio di un dado: 6 casi (1, 2, 3, 4, 5, 6), ciascuno con probabilità  $\frac{1}{6}$ .

## Caso “classico”

Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea “frequentista”

Esempi

Limiti

Nel caso classico si contano gli elementi di  $\Omega$  (i “casi possibili”): siano  $n$ .

Ogni evento elementare ha probabilità  $= \frac{1}{n}$ .

Un evento non elementare  $A$  ha quindi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{numero di elementi di } A}{n}.$$

Interpretando gli elementi di  $A$  come i “casi favorevoli” ad  $A$  (ovvero quelli che lo realizzano) si ottiene la formula che molti hanno visto nelle scuole superiori:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}.$$

Diventa fondamentale saper contare i casi: rispolverate il calcolo combinatorio!

## Esempio 1

Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

Esperimento: lancio una moneta 3 volte. Qual è la probabilità che esca testa almeno 2 volte? E esattamente 2 volte?

$$\Omega = \{CCC, CCT, CTC, CTT, TCC, TCT, TTC, TTT\}$$

quindi  $\Omega$  ha  $8 = 2^3$  elementi (2 scelte per il primo lancio, 2 per il secondo, 2 per il terzo).

$A = \{CTT, TCT, TTC, TTT\}$  e  $A$  ha 4 elementi.

$B = \{CTT, TCT, TTC\}$  e  $B$  ha 3 elementi.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = 1/2; \mathbb{P}(B) = \frac{3}{8}. \quad (\text{si vedrà caso generale v.a. Binomiali})$$

## NOTA BENE

È sbagliato dire: "casi possibili: 0, 1, 2 oppure 3 teste, quindi la probabilità di  $B$  è  $\frac{1}{4}$ " (perché? cosa sbagliamo?).

## Esempio 2

Consideriamo una pianta diploide (= 2 copie di ogni gene) in cui il colore dei fiori sia regolato da un gene che ha due alleli:  $A$  e  $a$ .



Fiori di *Pisum sativum* (wikipedia)

## Esempio 2

Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

Gli individui  $AA$ ,  $Aa$  hanno fiori rossi; quelli  $aa$  fiori bianchi ( $A$  è dominante,  $a$  recessivo).

Incrocio due piante  $Aa$ : qual è la probabilità che la pianta figlia abbia fiori rossi?

$\Omega = \{AA, Aa, aA, aa\}$  (la prima lettera indica l'allele ereditato dalla pianta "madre" e la seconda quello ereditato dal "padre").

$R = \text{"la pianta figlia ha fiori rossi"} = \{AA, Aa, aA\}$   
e dunque

$$P(R) = \frac{3}{4}.$$

## Esempio 3

In una foresta del nord America ci sono  $N$  grizzly oggetto di studio.



Esemplare di *Ursus arctos horribilis*



## Esempio 3

Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

Degli  $N$  grizzly finora ne sono stati marcati  $k$ . Ne catturo 5: qual è la probabilità che 2 siano marcati e 3 no?

$\Omega$  = sottoinsiemi di 5 oggetti che posso pescare da un insieme di  $N$ .  $\Omega$  ha  $\binom{N}{5}$  elementi.

$A$  = sottoinsiemi di 5 oggetti di cui 2 scelti dall'insieme dei marcati e 3 da quello dei non marcati.

$$|A| = \binom{k}{2} \cdot \binom{N-k}{3}$$

il numero di modi in cui posso scegliere 2 orsi fra i  $k$  marcati  
per il numero di modi in cui posso scegliere 3 orsi fra gli  
 $N - k$  non marcati

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{k}{2} \cdot \binom{N-k}{3}}{\binom{N}{5}}.$$

## Ricordiamo

Dato un insieme di  $n$  oggetti, ci sono  $\binom{n}{k}$  sottoinsiemi di  $k$  oggetti ( $k$  intero fra 0 e  $n$ ).

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Il simbolo  $\binom{n}{k}$  si chiama **coefficiente binomiale** e si legge in breve " $n$  su  $k$ ".

Ricordiamo anche che  $n!$  è il **fattoriale** di  $n$  definito come

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

# Limiti dell'approccio classico

Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

Le ipotesi necessarie per utilizzare "probabilità = casi favorevoli/casi possibili" sono due:

- 1 il numero di casi possibili (cioè quello degli elementi di  $\Omega$ ) è **finito**;
- 2 i casi sono **equiprobabili**.

## Esempi dove l'approccio classico non funziona

La formula non va bene per le probabilità dei seguenti eventi:

- che lanciando una moneta compaia testa per la prima volta al quinto lancio: **casi possibili infiniti**  $= \mathbb{N}$ ;
- che il prossimo salto del campione italiano di salto in lungo sia esattamente di 8,3245678m: **casi possibili infiniti** = tutte le misure **reali** nell'intervallo  $[0,10]$ ;
- che il prossimo 2 luglio a Milano ci sia una temperatura massima (arrotondata all'intero inferiore) di 32 gradi: casi possibili finiti = interi fra -30 e +60, ma **non equiprobabili**;
- che lanciando due dadi la somma faccia 7: casi possibili =  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  **non equiprobabili**;
- che il lancio di una moneta *truccata* dia testa: casi possibili =  $\{\text{testa}, \text{croce}\}$  **non equiprobabili**;
- che un bambino scelto a caso fra gli scolari delle materne milanesi si ammali di influenza nel prossimo mese di dicembre: casi possibili =  $\{\text{si ammala}, \text{non si ammala}\}$  **non equiprobabili**.

## Idea “frequentista”

L'idea è di raccogliere un certo numero di dati (siano  $n$ ) da esperimenti aleatori, vedere quante volte si realizza l'evento  $A$  che ci interessa (siano  $k$  volte) e prendere

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n}.$$

L'ipotesi implicitamente assunta è che gli esperimenti di cui abbiamo i dati avvengano “nelle stesse condizioni” dell'esperimento in cui osserveremo o meno il nostro evento  $A$ .

In altre parole si assume che “il passato aiuti a prevedere il futuro”.

## Esempio 1

Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

Per stabilire la probabilità dell'evento "testa" con la moneta truccata faremo  $n$  lanci, conteremo le teste ( $k$ ) e

$$\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n}.$$

Ad esempio, con 30 lanci e 12 teste

$$\mathbb{P}(A) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

## Esempio 2

Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

Per la probabilità che il prossimo 2 luglio a Milano ci sia una temperatura massima (arrotondata all'intero inferiore) di 32 gradi possiamo guardare le registrazioni dei 2 luglio degli ultimi 70 anni (quindi avremo 70 dati), contare in quanti di essi la temperatura fu di 32 gradi e

$$\mathbb{P}(T_{\max} = 32) = \frac{\text{numero temperature} = 32}{70}.$$

## Esempio 3

Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

**Esempi**

Limiti

Per la probabilità che un bambino si ammali di influenza nel prossimo mese di dicembre possiamo guardare i dati statistici dell'ultimo anno e

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{numero bambini influenzati l'anno scorso}}{\text{numero totale scolari}}.$$



# Limiti dell'approccio frequentista

Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

- 1 Se l'esperimento è ripetibile come nel caso della moneta, esperimenti diversi daranno probabilità diverse.

Esempio: prendete una moneta perfettamente equilibrata (dunque  $\mathbb{P}(\text{testa}) = 0.5$ ) può benissimo accadere che in 10 lanci ci siano 4 teste.

In questo caso un frequentista direbbe  $\mathbb{P}(\text{testa}) = 0.4$ .

Poi ripetiamo l'esperimento: 10 lanci e 7 teste.

Il frequentista direbbe  $\mathbb{P}(\text{testa}) = 0.7!!!$

Cosa succede se  $n \rightarrow \infty$ ?Come  
assegnare  $\mathbb{P}$ ?

Idea classica

Esempi

Limiti

Idea "frequentista"

Esempi

Limiti

Anche la casalinga di Voghera ([http://it.wikipedia.org/wiki/Casalinga\\_di\\_Voghera](http://it.wikipedia.org/wiki/Casalinga_di_Voghera)) sa che dobbiamo fare **molte** lanci per poter dire

$$\mathbb{P}(\text{testa}) = \frac{\text{numero teste osservate}}{\text{numero lanci fatti}};$$

anzi, la cosa è "tanto più vera tanto più il numero di lanci  $n$  è grande".

$$\mathbb{P}(\text{testa}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{numero teste osservate}}{n \text{ lanci}}.$$

Ritroveremo questa "perla di saggezza popolare" come caso particolare della **legge dei grandi numeri**.

- ② Ad un evento che non sia osservato negli esperimenti fatti si attribuisce probabilità zero.

Esempio: contiamo per 15 giorni le bobine prodotte da una certa industria.

24, 35, 45, 43, 25, 33, 33, 30, 29, 27, 32, 24, 23, 42, 42.

Apparirebbe che  $\mathbb{P}(31 \text{ bobine}) = 0$  ma non ha molto senso!

Che soluzione suggerite a questo problema?

Suggerimento: se si facessero più osservazioni...

## Un terzo limite

### 3 L'idea frequentista non va bene se il futuro è "diverso" dal passato.

Esempi.

- La probabilità di una temperatura massima di 32 gradi il 2 luglio non è prevedibile con i dati storici se siamo in presenza di cambiamenti climatici;
- la probabilità di ammalarsi di un bambino può essere diversa da un anno con l'altro a causa di una diversa profilassi e/o virulenza del virus.

Naturalmente in mancanza di altre informazioni si può considerare (in situazioni come questi esempi) la probabilità di un evento come quella ottenuta con l'idea frequentista *salvo cambiare valutazione* in seguito a nuovi dati **decisamente diversi dal previsto.**

Vedremo più avanti come decidere con dei test statistici se i dati sono **significativamente diversi dal previsto.**