

Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoriaV.a. discrete e
continueLa densità di
una
v.a. discretaProprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

Iniziamo con una definizione (capiremo fra poco la sua utilità):

DEFINIZIONE DI VARIABILE ALEATORIA

Una variabile aleatoria (in breve v.a.) X è una funzione che ha come dominio Ω e come codominio \mathbb{R} . In formule:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

A voler essere precisi non tutte le funzioni possibili sono v.a. ma questo è un problema tecnico di cui non ci curiamo (è veramente molto difficile trovare funzioni che non siano v.a.).

Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoriaV.a. discrete e
continueLa densità di
una

v.a. discreta

Proprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

A cosa servono?

Una funzione fa corrispondere ad ogni valore nel dominio un valore nel codominio. Sembrerebbe non esserci nulla di aleatorio in questo! (aleatorio=casuale da *alea* in latino)

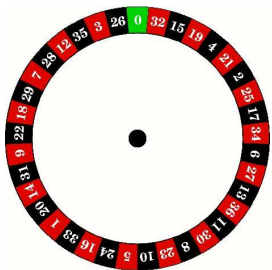
Dobbiamo pensare che il caso peschi dal nostro mondo dei casi possibili Ω un elemento $\omega \in \Omega$ (dunque vediamo uno dei casi possibili, se ne *realizza* uno solo).

Può accadere che noi non conosciamo esattamente chi sia ω ma ne conosciamo $X(\omega)$ dove X è una particolare funzione. Ad esempio se una persona va dal medico, quest'ultimo ha davanti a sé un "caso possibile" fra tutti i casi "essere umano" possibili.

Il medico non può sapere **tutto** del paziente (ad esempio lo stato di tutte le molecole del suo corpo!), ma può osservare il valore di alcune v.a. come X = pressione massima, Y = pressione minima, Z = glicemia a digiuno, etc etc.

Esempio: la roulette

Supponiamo di giocare alla roulette, puntando 10 € sul rosso, 15 € sul pari e 5 € sul 19; quello che vinciamo dopo che la ruota ha finito di girare è una v.a. X .



Infatti qui $\Omega = \{0, 1, \dots, 36\}$ (ω possibili = interi fra 0 e 36) e (salvo trucchi) ogni caso ha uguale probabilità. X dipende dall' ω che esce quindi è una **funzione** definita su Ω a valori in \mathbb{R} .

Le vincite possibili

Quel che ci interessa a questo punto non è tanto che ω (cioè il numero della roulette) esca, quanto $X(\omega) = \text{vincita risultante (in €)}$.

La vincita è diversa se esce un rosso pari (RP), un rosso dispari (RD), un nero pari (NP), un nero dispari (ND), zero. Infatti

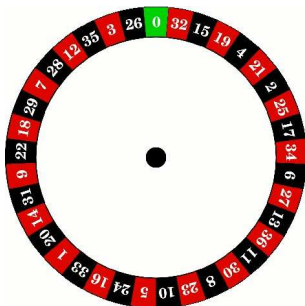
$$X(\omega) = 20 \text{ se } \omega \in RD \setminus \{19\}$$

$$X(\omega) = 30 \text{ se } \omega \in NP$$

$$X(\omega) = 50 \text{ se } \omega \in RP$$

$$X(\omega) = 200 \text{ se } \omega = 19$$

$$X(\omega) = 0 \text{ se } \omega \in ND \cup \{0\}$$



La probabilità delle vincite

Variabili aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoria

V.a. discrete e continue

La densità di una v.a. discreta

Proprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

La v.a. X può quindi assumere i valori: $\{0, 20, 30, 50, 200\}$.

Ricordando che la roulette “pesca” con uguale probabilità uno dei 37 numeri possibili, abbiamo

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{9}{37} \text{ (gli } \omega \text{ corrispondenti sono } 0, 15, 17, 13, 11, 33, 31, 29, 35)$$

$$\mathbb{P}(X = 20) = \frac{9}{37} \text{ (gli } \omega \text{ corrispondenti sono } 21, 25, 27, 23, 5, 1, 9, 7, 3)$$

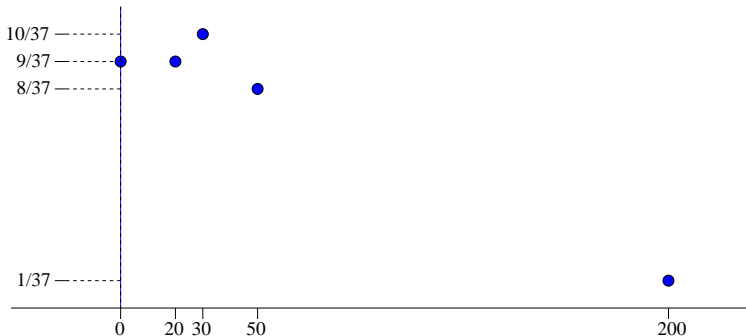
$$\mathbb{P}(X = 30) = \frac{10}{37} \text{ (gli } \omega \text{ corrispondenti sono } 4, 2, 6, 8, 10, 24, 20, 22, 28, 26)$$

$$\mathbb{P}(X = 50) = \frac{8}{37} \text{ (gli } \omega \text{ corrispondenti sono } 32, 34, 36, 30, 16, 14, 18, 12)$$

$$\mathbb{P}(X = 200) = \frac{1}{37} \text{ (l' } \omega \text{ corrispondente è 19)}$$

La probabilità in un grafico

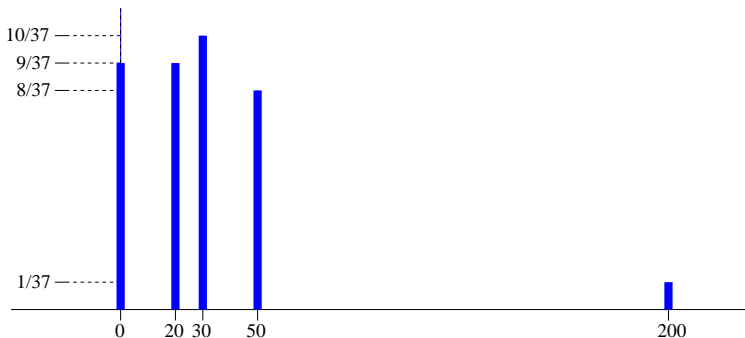
Rappresentiamo i valori che X può assumere sull'asse delle x e la probabilità con cui li assume sull'asse delle y .



L'altezza (y) di un punto (x, y) è la probabilità con cui X assume il corrispondente valore x .

La probabilità in un grafico

Per evidenziare meglio i punti sostituiamoli con delle linee verticali:



Notate che la somma delle altezze di queste righe fa 1 (perché?)

Un po' di nomenclatura

Nota bene

Le caratteristiche interessanti di una v.a. X sono due:

- l'insieme dei suoi (possibili) valori;
- la probabilità con cui assume uno o più valori.

I valori che le v.a. (che noi tratteremo) possono assumere sono numeri reali: le v.a. in questo caso si dicono anche **v.a. numeriche**.

Le v.a. numeriche che tratteremo si suddividono in due tipi: le **v.a. discrete** e le **v.a. continue**. (Questi due casi NON esauriscono tutte le v.a. numeriche)

Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoria

La funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoria

La funzione dei
quantili di una
variabile aleatoria

V.a. discrete e
continue

La densità di
una
v.a. discreta

Proprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

La legge di una variabile aleatoria

DEFINIZIONE DI LEGGE

Data una variabile aleatoria X la misura di probabilità \mathbb{P}_X così definita

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A)), \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

si dice **legge** di X .

Non tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R} sono ammissibili nella definizione precedente, ma questo è un problema tecnico di cui non ci occuperemo.

La funzione di ripartizione di una variabile aleatoria

DEFINIZIONE DI Fz. di ripartizione

Data una variabile aleatoria X a valori in \mathbb{R} la funzione $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ così definita

$$F_X(t) := \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, t])) \equiv \mathbb{P}_X((-\infty, t]), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

si dice **funzione di ripartizione** di X .

La funzione di ripartizione di una variabile aleatoria

Una funzione di ripartizione F_X ha le seguenti proprietà:

- 1 è non decrescente (quindi ha limiti da destra e da sinistra);
- 2 $\lim_{s \rightarrow t^+} F_X(s) = F(t)$ (continuità da destra) per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- 3 $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$.

Una funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ che soddisfa le 3 proprietà precedenti è la funzione di ripartizione di qualche variabile X .

Altre proprietà di una Fz. di ripartizione

Variabili aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoria

La funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoria

La funzione dei
quantili di una
variabile aleatoria

V.a. discrete e continue

La densità di una v.a. discreta

Proprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

Data una funzione di ripartizione F_X allora:

- $\mathbb{P}_X((-\infty, t)) = \lim_{s \rightarrow t^-} F_X(s) \leq F(t);$
- $F_X(t) - \lim_{s \rightarrow t^-} F_X(s) = \mathbb{P}_X(\{t\}) \equiv \mathbb{P}(X = t);$
- $F_X = F_Y$ se e solo se $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y;$
- l'insieme di discontinuità di F_X è finito o numerabile.

La funzione dei quantili

DEFINIZIONE DI Funzione dei Quantili

Per ogni funzione di ripartizione F (si chiama *funzione dei quantili* Q_F o *pseudoinversa* di F la funzione così definita

$$Q_F(x) := \inf\{t : F(t) \geq x\}, \quad x \in (0, 1).$$

Se $F = F_X$ allora si scrive Q_X al posto di Q_{F_X} .

Una funzione dei quantili Q_X ha le seguenti proprietà:

- è non decrescente (quindi ha limiti da destra e da sinistra);
- $\lim_{s \rightarrow x^-} Q_X(s) = Q(x)$ (continuità da sinistra) per ogni $x \in (0, 1)$;
- $F(Q_F(x)) \geq x$ e $Q_F(F(t)) \leq t$ per ogni $x \in (0, 1)$.
- Se $Y = aX + b$ con $a > 0$ allora $Q_Y = aQ_X + b$.

La funzione dei quantili di una variabile aleatoria

Nota.

Se esiste $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ tale che $F|_{(a,b)} : (a, b) \rightarrow (0, 1)$ è una funzione biettiva (cioè iniettiva e suriettiva) allora Q_F è la funzione inversa di $F|_{(a,b)}$.

Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoria

La funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoria

La funzione dei
quantili di una
variabile aleatoria

V.a. discrete e
continue

La densità di
una

v.a. discreta

Proprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

La funzione dei quantili di una variabile aleatoria

A cosa serve la funzione dei quantili Q_X ?

Permette di risolvere i problemi del tipo: dato un valore $\alpha \in (0, 1)$ calcolare il minimo valore t tale che $\mathbb{P}(X \leq t) \geq \alpha$; tale valore è $t = Q_X(\alpha)$.

Esempio: se X è la variabile che controlla l'altezza di un individuo preso a caso da una popolazione, qual è la minima altezza di una porta affinché, con probabilità almeno 0.95, l'individuo ci passi senza chinarsi? (Equiv. il 95% della popolazione passi sotto la porta?)

R. $Q_X(0.95)$.

V.a. discrete e continue

DEFINIZIONE DI V.A. DISCRETA O CONTINUA

Una v.a. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ avente come immagine in \mathbb{R} l'insieme V (= insieme dei valori che X può assumere) si dice

- discreta se V è un insieme finito oppure infinito numerabile;
- continua se V è un insieme infinito continuo (= più “numeroso” del numerabile).

La X dell'esempio della roulette ha $V = \{0, 20, 30, 50, 200\}$ quindi è discreta.

Ricordo che esempi di insiemi continui sono \mathbb{R} o suoi intervalli (non confondete finito con limitato!); ad esempio la variabile che mi dice dopo quanto si brucerà una lampadina che accendessi adesso è una v.a. continua.

La densità di una v.a. discreta

La seconda caratteristica importante delle v.a. è la probabilità di assumere i valori (uno o più di essi).

Questa probabilità è la funzione di cui abbiamo visto il grafico poco fa (prima con i punti, poi con le righe).

DEFINIZIONE DI DENSITÀ DISCRETA DI V.A.

Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una v.a. discreta. La funzione

$$f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

definita da $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ è la funzione di densità (discreta) della v.a. X .

Dunque f_X associa ad ogni valore x la probabilità che X assuma quel valore.

Se x non è uno dei valori possibili, allora $f_X(x) = 0$, mentre se x è uno dei valori possibili, allora $f_X(x)$ è la probabilità che la v.a. X assuma il valore x .

Come può essere V nel caso discreto

Ricordiamo ancora

Ciò che ci interessa di una v.a. discreta è:

- l'insieme V dei valori possibili;
- la densità f_X .

L'insieme V può essere

- finito, e allora lo indichiamo genericamente con $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (qui V ha n elementi);
- oppure numerabile, e allora lo indichiamo come una *successione* di elementi $V = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Due proprietà di f_X Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoriaV.a. discrete e
continueLa densità di
una
v.a. discretaProprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

Una funzione di densità discreta

- 1 assume solo valori ≥ 0
- 2 la somma dei suoi valori è 1, ovvero

$$\sum_{x_i \in V} f_X(x_i) = 1.$$

La cosa non deve stupirci in quanto i valori di f_X altro non sono che probabilità di eventi e

$$\begin{aligned} \sum_{x_i \in V} f_X(x_i) &= \sum_{x_i \in V} \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{x_i \in V} (X = x_i)\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

Ancora roulette

Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoriaV.a. discrete e
continueLa densità di
una
v.a. discretaProprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

Nell'esempio di X = vincita alla roulette,

$$V = \{0, 20, 30, 50, 200\}$$

$$f_X(0) = \frac{9}{37}, f_X(20) = \frac{9}{37}, f_X(30) = \frac{10}{37}, f_X(50) = \frac{8}{37},$$
$$f_X(200) = \frac{1}{37} \text{ (} f_X(x) = 0 \text{ per gli altri } x \in \mathbb{R} \text{)}.$$

Nota bene

Abbiamo ricavato la densità f_X **assumendo implicitamente** che la roulette segua un modello: quello in cui tutti i numeri della ruota hanno la stessa probabilità.

In molti casi capire quanto vale la probabilità dei singoli valori possibili non è banale. Si deve o supporre che la variabile segua un certo modello noto (vedremo esempi di modelli), oppure procedere come nel prossimo esempio.

Le covate del *Passer Italiæ*

Vogliamo analizzare la biologia riproduttiva del *Passer Italiæ*
(un ibrido del *Passer Domesticus* e del *Passer Hispaniolensis*).



<http://www.pbase.com/bracciluca>

(Un articolo del 1993 di Brichetti, Caffi, Gandini, ha raccolto e
analizzato molti dati a riguardo.)

Le covate del *Passer Italiae*

Variabili aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoria

V.a. discrete e continue

La densità di una

v.a. discreta

Proprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

Consideriamo la variabile X = numero di uova per covata: a priori non sappiamo dire né chi sia V né f_X .

Idea: raccogliamo (molti) dati e poniamo V = insieme dei valori osservati; probabilità di un valore = frequenza relativa con cui è stato osservato.

Questo metodo ha delle limitazioni:

- alcuni valori possibili potrebbero non venire osservati;
- la frequenza osservata potrebbe anche essere assai diversa dalla “vera” probabilità.

Il **buon senso** ci dice che questi inconvenienti sono meno probabili se raccogliamo **molti** dati (ad esempio: 5 dati non va bene, 200 dati meglio!).

Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoriaV.a. discrete e
continueLa densità di
una
v.a. discretaProprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

Sono stati raccolti 230 dati:

Numero di uova	Freq. assoluta	Freq. relativa
2	12	0.0522
3	15	0.0652
4	21	0.0913
5	82	0.3565
6	96	0.4174
7	3	0.0130
10	1	0.0044

Ricordiamo che probabilità \approx frequenza relativa è solo una **approssimazione** (ma in questo caso è il meglio che possiamo fare).

Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

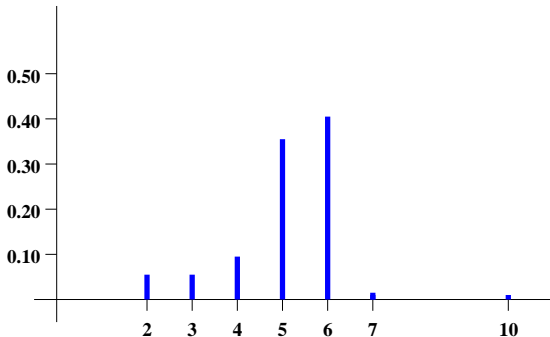
La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoriaV.a. discrete e
continueLa densità di
una

v.a. discreta

Proprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo



Trattandosi di un'approssimazione sperimentale, il buon senso deve guidarci nel suo utilizzo. Ad esempio Brichetti, Caffi, Gandini osservano che il valore 10 è da considerarsi frutto del concorso di due coppie nello stesso nido, quindi andrebbe scartato come errore sperimentale.

Statistica descrittiva e inferenziale

Con l'analisi delle covate abbiamo iniziato a fare della statistica:

- descrittiva: analizza con grafici i dati osservati;
- inferenziale: deduce dai dati proprietà del modello.

Con la descrittiva abbiamo fatto un grafico delle frequenze osservate; con l'inferenziale abbiamo **stimato** la probabilità dei singoli valori con la frequenza osservata.

Quest'ultimo passaggio per ora è giustificato solo dal buon senso, vedremo che ha una giustificazione profonda.

Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoriaV.a. discrete e
continueLa densità di
una

v.a. discreta

Proprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

A questo punto potrebbe sorgere un dubbio: abbiamo definito

$$f_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i),$$

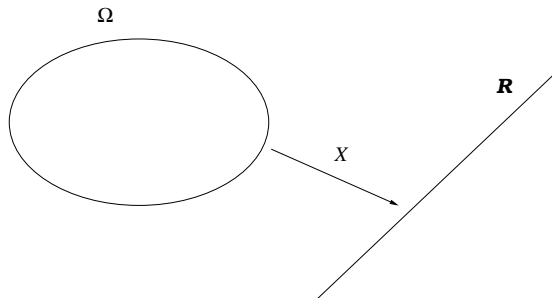
dove $x_i \in V$. Ma la probabilità si calcola di **eventi**: siamo sicuri che $(X = x_i)$ sia un evento?

Quando X assume valore x_i ? Quando il caso che si realizza ω è tale che $X(\omega) = x_i$.

Detto altrimenti, quando $\omega \in X^{-1}(x_i)$ e $X^{-1}(x_i)$ è effettivamente un evento (= sottoinsieme di Ω).

Rappresentiamo la funzione X

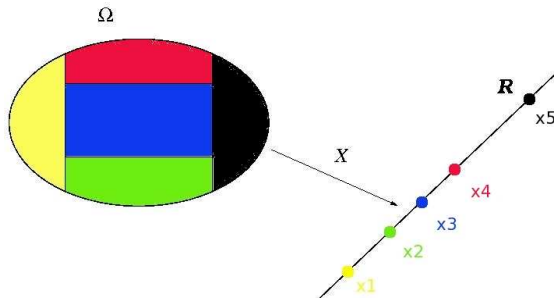
Vediamo una figura “insiemistica” della funzione X :



X associa ad ogni elemento di ω un elemento di \mathbb{R} .

Rappresentiamo la funzione X

Supponiamo che X possa assumere solo i valori x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .



Vediamo nei rispettivi colori: $(X = x_1)$ è la parte gialla di Ω , $(X = x_2)$ quella verde, $(X = x_3)$ quella blu, $(X = x_4)$ quella rossa e $(X = x_5)$ quella nera.

La parte gialla di Ω è fatta da quegli ω per cui $X(\omega) = x_1$, etc.

Variabili
aleatorie

La roulette

Valori possibili

La probabilità

La legge di una
variabile aleatoriaLa funzione di
ripartizione di una
variabile aleatoriaLa funzione dei
quantili di una
variabile aleatoriaV.a. discrete e
continueLa densità di
una
v.a. discretaProprietà di f_X

Esempi

Approfondiamo

Ecco un altro dubbio: per il problema della vincita alla roulette potevamo anche scegliere:

$$\Omega = \{0, 20, 30, 50, 200\}$$

con $\mathbb{P}(0) = \frac{9}{37}$, $\mathbb{P}(20) = \frac{9}{37}$, $\mathbb{P}(30) = \frac{10}{37}$, $\mathbb{P}(50) = \frac{8}{37}$,
 $\mathbb{P}(200) = \frac{1}{37}$.

Sembrerebbe che le v.a. non servano veramente e che ci bastino invece i nostri spazi campionari con la loro probabilità.

Perché le v.a.

Sono utili per due motivi:

- 1 in genere non serve costruire Ω , basta chiedersi quali sono i valori possibili e le loro probabilità;
- 2 spesso sullo stesso Ω “vivono” più di una v.a. e il “trucco” che abbiamo usato per l'esempio della roulette (costruire un Ω = valori possibili) potrebbe risultare difficile.

V.a. discrete e loro legge

Abbiamo introdotto le variabili aleatorie discrete. Ecco una serie di condizioni equivalenti:

- ① X è una v.a. discreta a valori in Y
- ② La legge \mathbb{P}_X è una misura di probabilità discreta
- ③ $\sum_{y \in Y: \mathbb{P}(X=y) > 0} \mathbb{P}(X = y) = 1$

In tal caso $V = \{y \in Y : \mathbb{P}(X = y) > 0\}$ e per ogni $A \subset Y$ si ha

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{y \in A: \mathbb{P}(X=y) > 0} \mathbb{P}(X = y) \equiv \sum_{y \in A \cap V} f_X(y).$$