

Sapete contare?

Cominciamo con qualcosa di semplice.

Principio della somma

Sia X un insieme finito e $\{X_i\}_{i \in E}$ una sua partizione finita (cioè $\#E = m < +\infty$).

In altre parole $X_i \cap X_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $X = \bigcup_{i \in E} X_i \equiv \bigcup_{i=1}^m X_i$.

Allora

$$\#X = \sum_{i \in E} \#X_i \equiv \sum_{i=1}^n \#X_i.$$

Principio del prodotto

Nel caso in cui $\#X_i = \#X_j$ per ogni $i, j \in E$ allora

$$\#X = \#E \cdot \#X_1.$$

In particolare se $X = E \times Y$ allora $\#X = \#E \cdot \#Y$.

Notazione

In queste slide consideriamo un insieme X finito di n elementi, ad esempio $X := \{1, 2, \dots, n\}$.

Per le dimostrazioni rigorose dei prossimi enunciati potete guardare, ad esempio, gli appunti di Analisi Combinatoria sul sito del docente.

Disposizioni di n oggetti in m posti con ripetizione

Principi base

Disposizioni

Caso con ripetizione

Caso con ripetizione

Combinazioni

Caso senza

ripetizione

Caso con ripetizione

Qualche
formula utile

Esempi

Si tratta di tutte le sequenze di lunghezza m di elementi di X (qui l'ordine é importante!). Ogni elemento può essere ripetuto in più posizioni.

Consideriamo quindi tutte le m -uple in X^m . **Quante sono?**

$${}_r D_n^m = n^m.$$

Deriva facilmente dal principio del prodotto, per induzione su m .

Disposizioni di n oggetti in m posti senza ripetizione

Principi base

Disposizioni

Caso con ripetizione

Caso con ripetizione

Combinazioni

Caso senza

ripetizione

Caso con ripetizione

Qualche formula utile

Esempi

Si tratta di tutte le sequenze di lunghezza m di elementi di X (l'ordine é importante!) in cui ogni elemento di X compare al più una volta.

Chiaramente se $m > n$ non ci sono disposizioni che soddisfano il criterio (ho più posti da riempire che elementi da mettere!). **Quante sono?**

$$D_n^m = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ n!/(n-m)! \equiv n(n-1) \cdots (n-m+1) & \text{se } n \geq m. \end{cases}$$

Deriva dal principio della somma, per induzione su m .

Al primo posto posso mettere un qualsiasi elemento di X , al secondo tutti gli elementi tranne quello utilizzato nel primo...

Combinazioni di n oggetti in m posti senza ripetizione

Principi base

Disposizioni

Caso con ripetizione

Caso con ripetizione

Combinazioni

Caso senza

ripetizione

Caso con ripetizione

Qualche formula utile

Esempi

Si tratta di tutte le sequenze di lunghezza m di elementi di X a meno dell'ordine in cui ogni elemento di X compare al più una volta.

In questo caso $(1, 2, 5)$ è considerata uguale a $(2, 5, 1)$ (e a tutte le altre 4 disposizioni equivalenti).

Perchè la classe di disposizioni uguali tra loro ha 6 elementi in questo caso?

Disposizioni di 3 oggetti in 3 posti senza ripetizione!

Allora, nel caso generale, posso considerare tutte le disposizioni di n oggetti in m posti senza ripetizione ricordando però che ogni disposizione è equivalente (considerata "uguale") ad altre $m! - 1$.

Combinazioni di n oggetti in m posti senza ripetizione

Principi base

Disposizioni

Caso con ripetizione

Caso con ripetizione

Combinazioni

Caso senza
ripetizione

Caso con ripetizione

Qualche
formula utile

Esempi

Quindi si ottiene

$$C_n^m = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \binom{n}{m} \equiv \frac{n!}{m!(n-m)!} & \text{se } n \geq m. \end{cases}$$

Altra importante interpretazione: C_n^m è anche il numero totale di sottoinsiemi di cardinalità m che posso estrarre dall'insieme X .

Combinazioni di n oggetti in m posti con ripetizione

Si tratta di tutte le disposizioni di n oggetti in m posti con ripetizione considerate a meno dell'ordine.

Il calcolo è leggermente più complicato di quello precedente, quindi ci limitiamo al semplice enunciato.

$${}^r C_n^m = \binom{n + m - 1}{m}.$$

Alcune formule utili

Si consideri l'insieme X e ci si chieda in quanti modi si possa partizionare l'insieme in k sottoinsiemi disgiunti e ordinati in cui il primo ha n_1 elementi, il secondo n_2 elementi e così via fino all'ultimo che ne contiene n_k (con $n = \sum_{i=1}^k n_i$).

La risposta è il coefficiente multinomiale

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} := \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}.$$

Alcune formule utili

Si consideri una partizione specifica di X in k sottoinsiemi disgiunti e ordinati in cui il primo ha n_1 elementi, il secondo n_2 elementi e così via fino all'ultimo che ne contiene n_k .

Supponiamo di selezionare m elementi di X in modo che m_1 siano elementi del primo sottoinsieme, m_2 siano elementi dal secondo e così via fino a m_k dell'ultimo (con $m = \sum_{i=1}^k m_i$ e $m_i \leq n_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$).

In quanti modi differenti lo posso fare?

Lo posso fare in $\prod_{i=1}^k \binom{n_i}{m_i}$ modi.

Notiamo che senza la restrizione, il numero totale di modi sarebbe stato semplicemente $\binom{n}{m}$.

Esempio 1

Principi base

Disposizioni

Caso con ripetizione

Caso con ripetizione

Combinazioni

Caso senza
ripetizione

Caso con ripetizione

Qualche
formula utile

Esempi



Abbiamo 2 scatole di fiammiferi contenenti rispettivamente m ed n fiammiferi ciascuna. Ogni volta prendo una scatola a caso con probabilità $1/2$ e prelevo un fiammifero (se ve ne sono). Qual è la probabilità che all'apertura della prima scatola vuota, l'altra non sia vuota?

Qual è la probabilità che al primo svuotamento di una scatola, nell'altra rimangano ancora k fiammiferi (in questo caso si supponga $m = n$ per semplicità)?

Notiamo la differenza tra gli eventi "apertura della prima scatola vuota" e "primo svuotamento di una scatola".

Esempio 1: svolgimento

Per calcolare la probabilità di avere una scatola non vuota quando si apre per la prima volta una scatola vuota (evento A), calcoliamo la probabilità dell'evento A^C = “quando apro per la prima volta una scatola vuota, anche l'altra è vuota”.

Modellizziamo il problema in questo modo. Considero un percorso casuale in \mathbb{Z}^2 che parte dal punto (m, n) e può ad ogni passo scendere di un'unità (apertura della seconda scatola) oppure andare a sinistra di un'unità (apertura della prima scatola). La scelta tra i due spostamenti è casuale e con uguale probabilità.

L'evento A^C coincide con il raggiungimento dell'origine $(0, 0)$.

Esempio 1: svolgimento

Calcoliamo quanti sono i percorsi per raggiungere l'origine: la condizione necessaria e sufficiente per raggiungere l'origine è fare m passi a sinistra e n passi in discesa (non importa in quale ordine).

Ogni percorso è univocamente determinato dalla sequenza di passi (e dal punto di partenza). Quindi devo vedere in quanti modi posso mettere in fila m passi a sinistra e n passi in discesa.

Ho quindi un insieme di $n + m$ elementi (i passi successivi) tra cui scegliere gli m che andranno a sinistra. Quindi devo sapere in quanti modi posso scegliere un sottoinsieme di cardinalità m in un insieme di cardinalità $m + n$.

$$C_{m+n}^m = \binom{m+n}{m}$$

Esempio 1: svolgimento

Ogni percorso ha probabilità $1/2^{m+n}$ da cui

$$\mathbb{P}(A^c) = \binom{m+n}{m} (1/2)^{m+n}.$$

$$\text{Da cui } \mathbb{P}(A) = 1 - \binom{m+n}{m} (1/2)^{m+n}.$$

Principi base

Disposizioni

Caso con ripetizione

Caso con ripetizione

Combinazioni

Caso senza
ripetizione

Caso con ripetizione

Qualche
formula utile

Esempi

Esempio 1: svolgimento

L'evento "primo svuotamento di una scatola" nella nostra interpretazione è l'azzeramento di una delle due coordinate; mentre l'evento "apertura della prima scatola vuota" sarebbe interpretabile come il passaggio ad una coordinata negativa (-1) .

Quindi ci stiamo chiedendo, nel caso $m = n$ in quanti modi tocco (per la prima volta) gli assi in uno dei due punti $\{(0, k), (k, 0)\}$.

Per simmetria basta calcolare il numero di percorsi da (n, n) a $(k, 0)$. L'ultimo passo è determinato: deve essere da $(k, 1)$ a $(k, 0)$ e ha probabilità $1/2$, devo quindi raggiungere $(k, 1)$. Si tratta di disporre $2n - k - 1$ passi di cui $n - 1$ in discesa $n - k$ a sinistra.

$$C_{2n-k-1}^{n-1} = \binom{2n-k-1}{n-1}$$

Esempio 1: svolgimento

Da cui la probabilità dell'evento

$$2 \binom{2n-k-1}{n-1} (1/2)^{2n-k} = \binom{2n-k-1}{n-1} (1/2)^{2n-k-1}.$$

Principi base

Disposizioni

Caso con ripetizione

Caso con ripetizione

Combinazioni

Caso senza
ripetizione

Caso con ripetizione

Qualche
formula utile

Esempi