



Matricola:

0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9

Istruzioni: riempire **completamente** le bolle con le cifre del numero di matricola (una cifra per colonna); nella parte sotto del foglio, riempire **completamente** le bolle con le risposte alle domande a scelta multipla. Per riempire, usare penna o matita nera, colorando tutto l'interno e cercando di non uscire dal bordo. Non sono ammesse correzioni, dato che il foglio verrà analizzato da un computer.

Cognome:.....Nome:.....

Segnare le risposte delle domande a scelta multipla

- (1) (A) (B) (C) (D) (E)
- (2) (A) (B) (C) (D) (E)
- (3) (A) (B) (C) (D) (E)
- (4) (A) (B) (C) (D) (E)
- (5) (A) (B) (C) (D) (E)
- (6) (A) (B) (C) (D) (E)

- (7) (A) (B) (C) (D) (E)
- (8) (A) (B) (C) (D) (E)
- (9) (A) (B) (C) (D) (E)
- (10) (A) (B) (C) (D) (E)
- (11) (A) (B) (C) (D) (E)
- (12) (A) (B) (C) (D) (E)

Domande a scelta multipla

* Gli esercizi marcati con un asterisco valgono più punti e vanno giustificati in maniera sintetica e chiara sul retro del primo foglio. In particolare, per i test specificare: tipo di test, ipotesi nulla ed alternativa, statistica utilizzata e suo valore numerico, regione di rifiuto o P-value con relativa stima (a seconda dei casi e di quanto richiesto nel testo).

(1) * In un test d'ipotesi per la media a varianza nota con $H_0 : \mu \geq \mu_0$ e $H_1 : \mu < \mu_0$ si rifiuta H_0 ad un livello $\alpha = 0.05$ in corrispondenza ad un campione di ampiezza n . Si prenda ora un campione di ampiezza $m > n$ tale che $\bar{x}_m = \bar{x}_n$; cosa succede al P-value $\bar{\alpha}$? (Sugg: ricordarsi che $\phi(x) < 1/2$ se e solo se $x < 0$.)

- (a) aumenta.
- (b) non cambia.
- (c) [=] diminuisce.
- (d) dipende dal valore della deviazione standard σ .
- (e) dipende dal segno di \bar{x}_n .

(2) Siano X e Y due variabili aleatorie normali indipendenti, $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(b, \kappa^2)$. Che legge ha $X - Y$?

- (a) $\mathcal{N}(a + b, \sigma^2 + \kappa^2)$.
- (b) $\mathcal{N}(a - b, \sigma^2 - \kappa^2)$.
- (c) $\mathcal{N}(a - b, (\sigma - \kappa)^2)$.
- (d) [=] $\mathcal{N}(a - b, \sigma^2 + \kappa^2)$.
- (e) $\mathcal{N}(a - b, \sigma^2 \kappa^2)$.

(3) Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti identicamente distribuite con valore atteso μ e varianza σ^2 . Per n grande si ha:

- (a) $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu, 0)$.
- (b) $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu - \sigma^2/n, 0)$.
- (c) $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.
- (d) [=] $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(\mu - \sigma^2/n, \sigma^2/n)$.
- (e) $\bar{X}_n - \sigma^2/n \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(4) * Un treno ha n carrozze; i numeri dei passeggeri delle carrozze sono variabili binomiali indipendenti di parametri $n = 20$ e $p = 3/4$. Quante carrozze deve avere come minimo il treno affinché la probabilità di avere almeno una carrozza piena sia superiore a 0.5?

- (a) Più di 42.
- (b) Più di 97.
- (c) [=] Più di 218.
- (d) Più di 150.
- (e) Più di 964.

(5) * Un dado viene lanciato 600 volte ottenendo le seguenti frequenze relative: $f_r(1) = 1/8$, $f_r(2) = 5/24$, $f_r(3) = 1/6$, $f_r(4) = 1/8$, $f_r(5) = 3/20$ e $f_r(6) = 9/40$. Cosa possiamo concludere sul fatto che il dado sia equilibrato a livello 5%, 2.5% e 1%?

- (a) Accetto all'1%, rifiuto al 2.5% e al 5%.
- (b) Accetto all'1%, al 2.5% e al 5%.
- (c) [=] Rifiuto all'1%, al 2.5% e al 5%. (*) La stima $q = 32$ da cui $\bar{\alpha} < 0.001$.
- (d) Accetto all'1% e al 2.5%, rifiuto al 5%.
- (e) Rifiuto all'1% e al 2.5%, accetto al 5%.

(6) * Due tipi di pezzi A e B vengono lavorati contemporaneamente da due macchine che operano in maniera indipendente. Siano $\{X_i\}_{i=1}^{10}$ e $\{Y_i\}_{i=1}^{10}$ i tempi di lavorazione (che si suppongono indipendenti) di 10 pezzi di tipo A e 10 pezzi di tipo B rispettivamente. Supponendo che, per ogni $i = 1, \dots, 10$, valga $X_i \sim \mathcal{N}(1, 4)$ e $Y_i \sim \mathcal{N}(4, 1)$; quanto vale la probabilità che per qualche i si verifichi $X_i > Y_i$?

- (a) Circa 0.0116.
- (b) Circa 0.9173.
- (c) [=] Circa 0.6097. (*) $X_i - Y_i \sim \mathcal{N}(-3, 5)$. Si utilizzi $\mathbb{P}(X_i - Y_i \leq 0) = \Phi(3/\sqrt{5}) = \Phi(1.341) \approx 0.9102$, da cui la probabilità cercata è $1 - \mathbb{P}(X_1 \leq Y_1)^{10} \approx 0.6097$
- (d) Circa 0.3274.
- (e) Circa 0.5.

(7) Sia

$$f_k(x) = \begin{cases} kx \log x & x \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver determinato per quale valore di k tale funzione rappresenta la densità di una variabile aleatoria, si calcoli il valore atteso di tale variabile.

- (a) [=] $4/9$. (*) Integrando per parti si trova che una primitiva per $x^n \log x$ è $(x^{n+1}/(n+1)) \cdot (\log x - 1/(n+1))$ da cui l'unica possibilità è $k = -4$ e di conseguenza il valore atteso $4/9$.
- (b) $5/12 \log(2)$.
- (c) $1/2$.
- (d) $2 \log(3/2)$.
- (e) Nessuno dei precedenti.

(8) Nella produzione di semiconduttori non è possibile controllare esattamente la resistenza degli elementi prodotti. Supponiamo che vengano misurati i valori della resistenza per $n = 20$ semiconduttori, ottenendo una media campionaria $\bar{x} = 12.3$ ed una varianza campionaria $s^2 = 40$.

Determinare l'intervallo bilaterale di confidenza al 95% per la media della resistenza dei semiconduttori prodotti.

- (a) $[9.34, 14.15]$.
- (b) [=] $[9.34, 15.26]$.
- (c) $[7.12, 17.48]$.
- (d) $[10.45, 14.15]$.
- (e) $[11.05, 13.55]$.

(9) Siano A e B^c eventi indipendenti. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) [=] $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B)$.
- (b) $\mathbb{P}(A \cup B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$.
- (c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- (d) $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) + 1 - \mathbb{P}(B)$
- (e) $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

(10) Supponiamo di voler eseguire un test d'ipotesi di livello α per testare l'ipotesi H_0 contro l'ipotesi H_1 . Quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

- (a) Se accetto H_0 , essa è vera con probabilità al massimo α .
- (b) [=] Se H_0 è vera, la probabilità di rifiutarla è al massimo α .
- (c) Se H_0 è falsa la probabilità di rifiutarla è al massimo α .
- (d) Se accetto H_0 , essa è sicuramente vera.
- (e) Se H_0 è vera, la probabilità di accettarla è almeno α .

(11) * Un amico di Romualdo, di nome Procopio, ha un problema particolare. Da anni Procopio, quando cammina per strada, sbatte la testa contro i cartelli stradali sistematicamente almeno in 25 uscite su 30, quasi ne fosse attratto da una forza misteriosa. Romualdo ha deciso quindi di mettere in atto il seguente rimedio: prima di ogni uscita lo fa ubriacare sperando che l'andatura barcollante lo aiuti ad evitare i cartelli. Dall'inizio di questa "cura" su 20 passeggiate Procopio ha sbattuto contro qualche cartello solo in 15 uscite. Valutare se il rimedio di Romualdo è davvero efficace, proponendo un test e calcolandone il P -value. Quale tra le seguenti affermazioni è corretta?

- (a) Ci sono abbastanza evidenze dell'efficacia della cura.
- (b) Non si hanno sufficienti informazioni per poter stabilire il valore del p -value, ma possiamo dire che la cura non è efficace al livello di significatività del 5%.
- (c) [=] Non ci sono abbastanza evidenze dell'efficacia della cura. (*) $p_0 = 5/6$, $\bar{p} = 3/4$, $H_1 : p < p_0$ da cui il P -value è $\Phi(z)$ dove $z = (3/4 - 5/6) / \sqrt{5/(36 \cdot 20)} = -1$. Essendo $\Phi(-1) \approx 0.158655$ non ci sono evidenze sull'efficacia.
- (d) Non si hanno sufficienti informazioni per poter stabilire il valore del p -value, ma possiamo dire che la cura non è efficace al livello di significatività del 10%.
- (e) Il P -value è circa 0.22.

(12) * Lancio una moneta equilibrata: se viene testa lancio un dado e denoto con X il numero uscito mentre se viene croce lancio due dadi e denoto con X la media aritmetica dei due numeri usciti. Dato che $X \leq 3$ qual è la probabilità che sia uscita testa?

- (a) $1/2$.
- (b) $5/11$.
- (c) $4/7$.
- (d) [=] $6/11$. (*) Sia Y il lancio della moneta. $\mathbb{P}(Y = T) = \mathbb{P}(Y = C) = 1/2$, $\mathbb{P}(X \leq 3 | X = T) = 1/2$, $\mathbb{P}(X \leq 3 | X = C) = (1 - 1/6)/2 = 5/12$ da cui $\mathbb{P}(X = T | X \leq 3) = (1/2) / (1/2 + 5/12) = 6/11$.
- (e) $7/12$.